הגדרות:

- ל P שמורחב מההסתברות שמעניקה לקטע את אורכו, נקרא מידת לבג.
- נניח שיש לנו (Ω, P, B), קבוצת לבג היא קבוצה L כך שקיימים $B_1, B_2 \in B$ עם התכונות הבאות: (א) $P(B_1) = P(B_2)$

  (ב) $B_1 \subseteq L \subseteq B_2$
- קבוצה שהסתברותה 0, L_0, היא כזו שלכל $\varepsilon > 0$ יש $A_\varepsilon \in A$ כך ש:

  (א) $P(A_\varepsilon) < \varepsilon$ (ב) $L_0 \subseteq A_\varepsilon$

21.11.08

<u>הסתברות</u>

$(\Omega, P, \mathcal{F})$.

<u>משתנים מקריים</u>

<u>הגדרה</u>: פונקציה <u>מדידה</u> (ממשית) המוגדרת על מרחב ההסתברות $(\Omega, P, \mathcal{F})$ - היא פונק' הממשית: לכל $c \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le c\} = X^{-1}(-\infty, c]$ היא קבוצה ב- $\mathcal{F}$.

<u>הגדרה שקולה לכך היא:</u> $(X: \Omega \to \mathbb{R})$

הגדרה: $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ היא מדידה לפי $\mathcal{F}$ - אם לכל קבוצת בורל B ב-$\mathbb{R}$ - $X^{-1}(B)$ (כלומר קבוצת כל המקורות של B תהיה מדידה (כלומר ב- $\mathcal{F}$).

א. $X^{-1}(-\infty, c]$

$X^{-1}(-\infty, c_n]$ מדידה.

לכל c_n

$\bigcup X^{-1}(-\infty, c_n] = X^{-1}(-\infty, d)$ $\leftarrow$ לכן גם המקורות של קטעים פתוחים מדידים.

ב. המשלימים הן קבוצות מדידות

לכן כל קטע $X^{-1}([a,b])$ מדידה. $(\quad)$

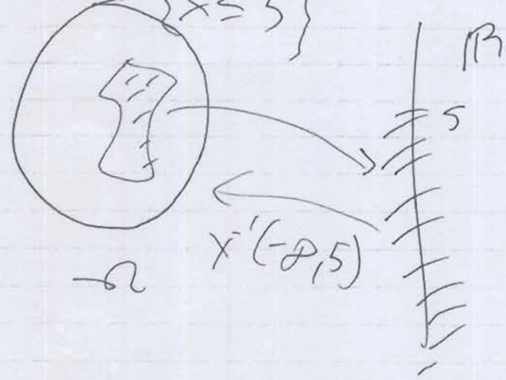
התמונה ההפוכה

$X^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{\omega \mid X(\omega) \in B_1 \cup B_2\} =$

$\{\omega \mid X(\omega) \in B_1\} \cup \{\omega \mid X(\omega) \in B_2\} =$

$= X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$

סימון - $X^{-1}(-\infty,c]=\{X\le c\}$



$(\Omega,P,\mathcal{F})$

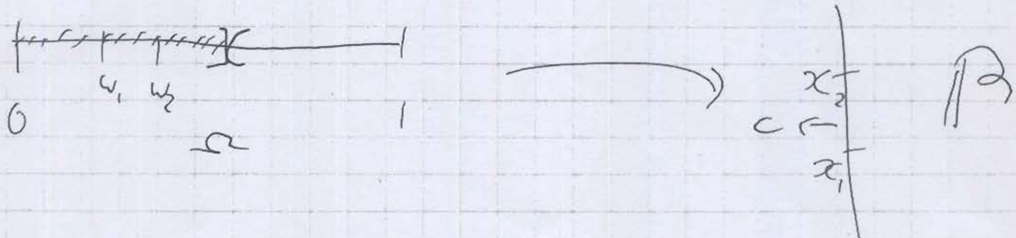
משתנה מקרי הוא פונקציה מדידה המוגדרת על $(\Omega,\mathcal{F})$

<u>דוגמאות:</u> $\Omega=[0,1]$

תהא $\mathcal{F}$ ה-σ שדה המוגדר ע"י החלוקה $[0,\frac{1}{2}],(\frac{1}{2},1]$

$$\mathcal{F}=\{\phi,\Omega,[0,\tfrac{1}{2}],(\tfrac{1}{2},1]\}$$

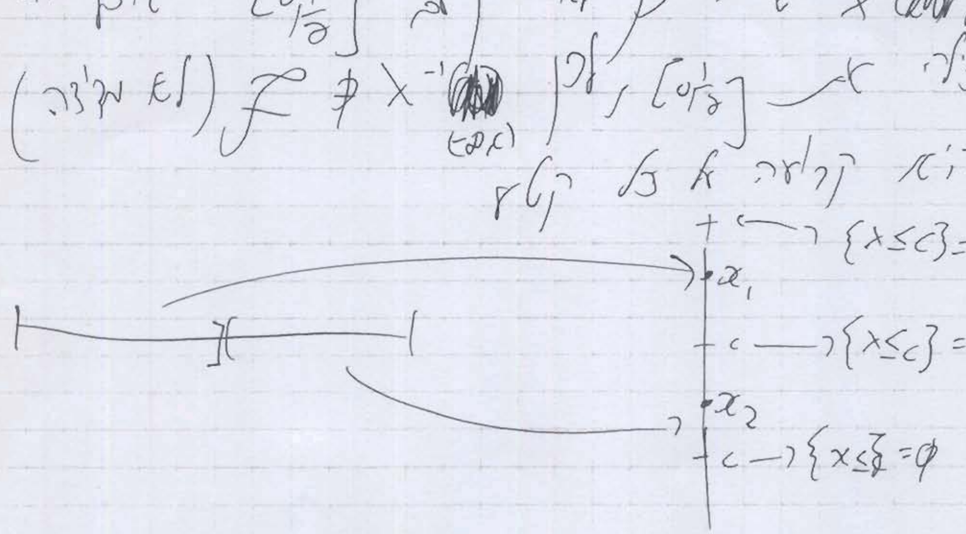
מהן הפונקציות המדידות לפי $\mathcal{F}$ (מדידות-$\mathcal{F}$) או שהן מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F})$?



נניח בשלילה שיש ω_1,ω_2 כך ש- $X(\omega_1)=x_1$, $X(\omega_2)=x_2$ שונים

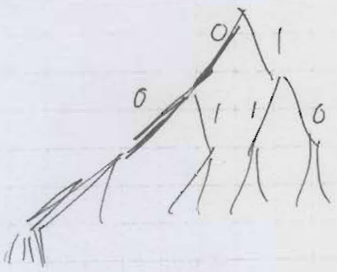
עבור X יש חילוק או [...] $[0,\frac{1}{2}]$ שלכן הוא לא מכיל את $[0,\frac{1}{2}]$, ולכן $X^{-1}\notin\mathcal{F}$ (לא מדידה)

לכן הוא קבועה על כל קטע



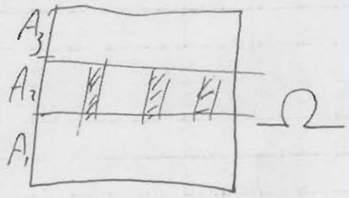
<u>מסקנה</u> - אם F מוגדרת באמצעות חלוקה Q, ו-X מדידה,
אז X מקבלת ערך בודד על כל אטום של Q.

מטילים מטבע ∞ פעמים - $\Omega=\{0,1\}^{\infty}$



כל אטום בחלוקה 1
מוגדר ע"פ
הרישומים באורך 3

$\Omega=[0,1]^2$



קבוצה מדידה היא מהטיפוס $B\times A_i$ כאשר $B\subseteq[0,1]$ בורל.
או איחוד...

$(\omega_1,\omega_2)\in\Omega$

$X(\omega_1,\omega_2)$

(Ω,F,P), X מ"מ.

נגדיר F - פונק' ההסתברות המצטברת

$$F_X(c)=P(X\le c)$$

$$F_X:(-\infty,\infty)\to[0,1]$$