2.11.08

מרחבי הסתברות בדידים

הגדרה: מרחב הסתברות בדיד:

Ω - קבוצה סופית או בת-מניה של נק'

P - פונק' הסתברות. $P: 2^{\Omega} \to [0,1]$

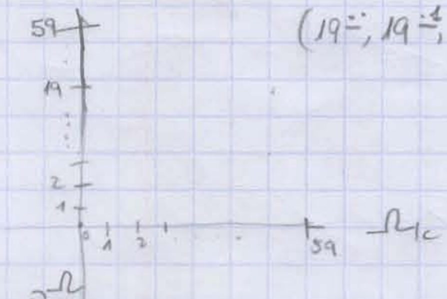
תכונות פונק' P: 1. $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$

2. (σ אדיטיביות) אם $A_1, A_2, \ldots$ היא סדרה של קבוצות של Ω זרות בזוגות אזי $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

במקרה זה ניתן לתאר את P באופן "פשוט" $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

דוגמה:

שני אנשים, א, ב מגיעים למק' מפגש מוסכמת בשעה אקראית בין 19^{00} ל-20^{00}. מוסכם שמי שמגיע ראשון מחכה עד 20^{00} או עד 20 דקות. (לפי מה שמגיע קודם). מה ההסתברות לפגישה?



הגישה הבדידה: $\Omega=\{0,1,2,\ldots,59\}^2$ $(=19^{00}, 19^{01}, \ldots, 19^{59})$

מניחים אי-תלות ואחידות.

מתי יש מפגש?

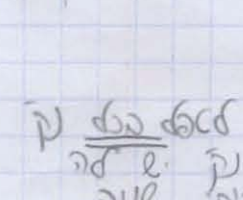
שעת הגעה של ב'	שעת הגעה של א'
0...19	0
0...20	1
0...21	2
⋮	⋮
0...37	18
0...38	19
1...39	20
40...59	59

$\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{20}$

$\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{21}$

יש בעיה לספור בכל נק' בנפרד. כל נק' יש לה חישוב הסתברות שונה.

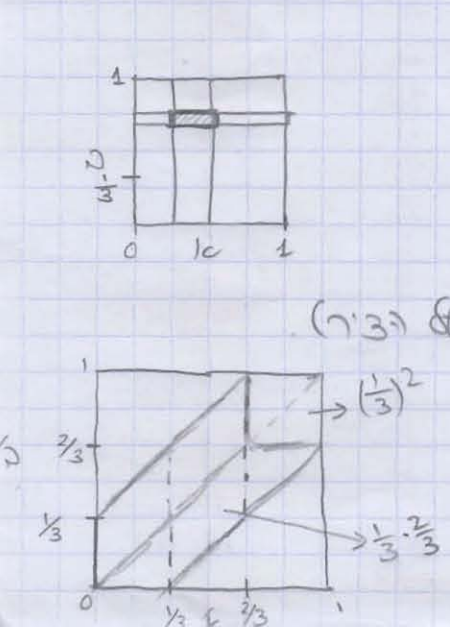
זה מורכב מדי!



הגישה הרציפה

אי תלות (מכפלת כל ריבוע היא מכפלת הצלעות)

אחידות (הסתברות קטע תלויה רק באורכו ולא במיקומו של הציר).



ההסתברות לפגישה $=\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$

אם $|\Omega| = \infty$ (לא בנ"מ) אז יש בעיה עם האחידות. $\frac{1}{\infty}$?! , ההסתברות הינה 0.

מרחב הסתברות:

מורכב משלושה רכיבים: Ω - קב' של נקודות, P - פונק' הסתברות

$\mathcal{F}$ - קבוצה של תתי קבוצות של Ω (המאורעות) המקיימת את התכונות הבאות: <u>א</u> $\phi \in \mathcal{F}$

<u>ב</u> אם $A \in \mathcal{F}$ אזי $\Omega - A = A^c \in \mathcal{F}$

<u>ג</u> אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

קבוצה $\mathcal{F}$ המקיימת תכונות אלה נקרא σ-שדה (מכאן $\mathcal{F}$ · field)

תכונות פונק' ההסתברות:

$P : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$, $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

σ אדיטיביות $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרות בזוגות, אזי $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

(P <u>לא</u> מוגדרת לכל קבוצה חלקית!).

5.11.08

מרחב הסתברות

$(\Omega,P,\mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ הוא σ-שדה (σ-אלגברה) כלומר $\mathcal{F}$ מקיימת את התכונות הבאות:

(א) $\emptyset\in\mathcal{F}$

(ב) אם $A\in\mathcal{F}$ אזי $A^c\in\mathcal{F}$

(ג) אם $A_1,\dots\in\mathcal{F}$ אז $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$

אם נחליף את ג' בהנחה יותר חלשה:

(ג') אם $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}$ אז $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$

נקבל קבוצה שהיא שדה (אלגברה). לכל קבוצה ב-$\mathcal{F}$ נקרא מאורע.

דוגמאות

(א) $\Omega=(0,1)$ $\mathcal{F}=\{\emptyset,\Omega,\{0\},\{1\}\}$. כאן $\mathcal{F}$ היא קבוצת החזקה

(ב) Ω סופית

$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ הוא σ-שדה וגם שדה כי 2^{Ω} הוא סופית

אבל לא כל σ-שדה (או שדה) חייב להיות קבוצת החזקה.

$\Omega=\{1,2,3\}$ $\mathcal{F}=\{\emptyset,\Omega,\{1,2\},\{3\}\}$.

במקרה הסופי כל שדה הוא גם σ-שדה.

(ג) הטלים מטבע שוב ושוב $\Omega_n=\{0,1\}^n=\{(x_1,\dots,x_n)/x_i\in\{0,1\}\}$

$\Omega_\infty=\{0,1\}^\infty=\{(x_1,x_2,\dots)/x_i\in\{0,1\}\}$

~~לכל $x_1,\dots,x_n$ $P(X_{n+1}=1/x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2}$~~

$P(A_{n+1,1}/B_{x_1,\dots,x_n})=\frac{1}{2}$ כאשר:

$A_{n+1,1}=\{(x_1,x_2,\dots),\ x_{n+1}=1\}$

לכל $x_i\in\{0,1\}$ $B_{x_1,\dots,x_n}=\{(y_1,y_2,\dots)\in\Omega,\ y_i=x_i\}$

אנחנו יודעים שלכל $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ $P(B_{x_1,\dots,x_n})=(\frac{1}{2})^n$

נגדיר: $C=\{(x_1,\dots).\ \lim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n$ קיים הגבול$\}$

נניח שנתונות לנו רק הקבוצות מהטיפוס $B_{x_1,\dots,x_n}$, אנחנו יכולים לקחת חיתוכים/איחודים אינסופיים. (אך בהכרח בני מניה), וניתן לעשות זאת באופן סדרתי, כיצד נוכל לייצר את C?

נסמן: אם $(x_1,\dots)$ אזי $\overline{X}_n=\frac{x_1,\dots,x_n}{n}$

$C=\{(x_1,x_2,\dots),\ \overline{X}_n$ מתכנס$\}$

מה המשמעות של $\bar{X}_n$ מתכנס?

לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|\bar{X}_n-\bar{X}_m|<\varepsilon$

(*) לכל k, יש N כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|\bar{X}_n-\bar{X}_m| < 1/k$.

נקבע k, n, m $\quad D_{n,m,k} = \{ (x_1, x_2, \dots) , |\bar{X}_n-\bar{X}_m| < 1/k \}$

קבוצה זו היא איחוד סופי של קבוצות מהטיפוס $B_{x_1,\dots,x_n}$.

נתרגם כעת את (*) $\quad C = \overset{\text{לכל } k}{\bigcap_{k}} \overset{\text{קיים } N}{\bigcup_{N}} \bigcap_{n,m\geq N} D_{n,m,k}$

9.11.08

תזכורת:

$$\Omega=\{0,1\}^{\infty}=\{(x_1,x_2,\dots)\ /\ x_i=0,1\ \ i=1,2,\dots\}$$

$$B_{x_1,\dots,x_n}=\{(y_1,y_2,\dots)\in\Omega\ /\ y_i=x_i\quad\forall\, 1\le i\le n\}$$

$$D_{n,m,k}=\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega\ /\ |x_n-x_m|<\tfrac{1}{k}\}$$

המטרה: להגדיר את הקבוצה $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega / \lim x_n$ קיים$\}$ באמצעות חיתוכים ואיחודים בני מניה של קבוצות אלמנטריות $B_{x_1,\dots,x_n}$

(נבט על הקבוצה $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega / |\bar{x}_n-\bar{x}_m|<\frac{1}{k}$ לכל $n,m\ge N\}$ $=\bigcap_{n,m\ge N} D_{n,m,k}$

ומה לגבי הקבוצה הבאה? $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega / |\bar{x}_n-\bar{x}_m|<1/k\ \ \forall n,m\ge N\}$ קיים N כך ש

$$=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n,m\ge N} D_{n,m,k}$$

ומה לגבי הקבוצה הבאה? $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega / |\bar{x}_n-\bar{x}_m|<1/k\ \ \forall n,m\ge N\}=$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n,m\ge N} D_{n,m,k}$$

$\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega /$ $\bar{x}_n$ סדרת קושי $\}$

מסקנה: אם יש σ-שדה המכיל את כל קבוצות $B_{x_1,\dots,x_n}$ אזי הוא מכיל את הקבוצה $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega /$ קיים $\lim \bar{x}_n\}$

מדוע הקבוצה $\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega / \lim \bar{x}_n=1/2\}$ נמצאת בכל σ-שדה המכיל את הקבוצות $B_{x_1,\dots,x_n}$.

נגדיר $F_{n,k}=\{(x_1,\dots)\in\Omega / |\bar{x}_n-\frac{1}{2}|<1/k\ \ \forall m\ge n\}$

$$\bigcap_k\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{n,k}$$

(חסכנו את החיתוך הנוסף כי ידוע מהו הגבול-½)

מספר עובדות פשוטות:

תהי Ω קבוצה כלשהי.

(א) קבוצת החזקה של Ω היא σ-שדה.

(ב) נניח ש $\mathcal{F}_i$ היא σ-שדה עבור כל $i\in I$ (I קבוצת אינדקסים),

אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ גם σ-שדה. (נסמן לשם קיצור את החיתוך הזה בתור $\mathcal{F}$

(נבדוק ש $\mathcal{F}$ מקיימת את 3 הדרישות של σ-שדה:

א. $\phi\in\mathcal{F}$, כי $\phi\in\mathcal{F}_i$ לכל i ולכן נמצאת בחיתוך.

(ב) $A\in\mathcal{F}$. מדוע $A^c\in\mathcal{F}$, כי עבור כל i מתקיים $B\in\mathcal{F}_i$ $B^c\in\mathcal{F}_i$ (כי הם σ-שדה).
לכן $A^c\in\mathcal{F}$.

(ג) $A_n\in\mathcal{F}$ $n=1,2,\dots$ מדוע $\bigcup_n A_n\in\mathcal{F}$?

נניח ש $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ הם σ שדה, האם $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ הם σ-שדה? לא!

ניקח $\Omega=[0,1]$ וניקח חלוקה (באופן של קב' זרות שאיחודם הוא הקבוצה כולה) של Ω.

$P_1=\{A_1,\dots,A_5\}$
$P_2=\{B_1,B_2\}$

נסמן את החלוקה P_1 ואת $\mathcal{F}_1$ נגדיר ה σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את P_1.

(כאשר P_1 סופי) $\mathcal{F}_1=$ קבוצת כל הקבוצות שהם איחודים של אברים של P_1

תזכורת:
חלוקה של P היא: $P=\{A_1,A_2,\dots\}$ כאשר $A_i\cap A_j=\phi$ לכל i,j. $\bigcup_{A_i\in P}A_i=\Omega$
אם $|P|<\infty$ נקרא לה חלוקה סופית.
אם P חלוקה! $A\in P$ נקרא לA אטום של P

ניקח חלוקה אחרת P_2 ותהי $\mathcal{F}_2$ ה-σ שדה הקטן ביותר שמכיל את P_2
ואכן $B_1\cup A_4$ הוא לא נמצא ב $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$.

(ד) אבל נגדיר בתור $\mathcal{F}_1\vee\mathcal{F}_2$ את ה σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$
ניקח את P_1, P_2 ונגדיר את החלוקה שמכילה את הקבוצות מהטיפוס
$A\cap B \mid A\in P_1, B\in P_2$

הגדרה: נאמר שחלוקה P_1 שמעדנת חלוקה P_2 אם ה σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את P_1 מכיל את ה σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את P_2.

תהי A קבוצה של תתי קבוצות של Ω. נגדיר <u>σ-שדה שנוצר ע"י A</u> הוא ה σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את A.

לעיתים קרובות נשתמש במקרה שבו A הוא בן מניה (דוגמא: כל הקטעים הרציונליים הפתוחים).
במקרה זה כל קבוצה ב σ-שדה הנוצר ע"י A תיקרא קבוצת בורל (Borel).
את ה σ-שדה של קבוצות בורל על הישר (או של הקטע) נסמן בתור $\mathcal{B}$.

דוגמאות:

(א) כל קטע (לא משנה אם רציונלי) הוא קבוצת בורל. ניקח תחילה קטע פתוח (a,b)
ניתן למצוא $a_n\searrow a$, $b_n\nearrow b$ רציונליים $\bigcup_n(a_n,b_n)=(a,b)$

$[a,b]$ $a_n\nearrow a$, $b_n\searrow b$ רציונליים $[a,b]=\bigcap_n(a_n,b_n)$

$[a,b)$

$$[a,b)^c = [0,a) \cup [b,1]$$

$$[0,a) = \bigcup_{a_n \nearrow a \text{ רציונלי}} [0,a_n)$$

ואותו דבר לקטעים מהסוג $(a,b]$.

(ב) איחוד של קטעים וחיתוך של קטעים הוא גם קבוצת בורל.

(ג) כל קבוצה בת-מניה היא קבוצת בורל.

תהי $I=[0,1] \supseteq A=\{a_1,a_2,\dots\}$

$$A_{i,k}=\{x\in I \mid |x-a_i|<1/k\}$$

$\bigcap_n A_{i,k}=\{a_i\}$ מספר לא ק' הוא קב' בורל.

$\bigcup_i \{a_i\}$

עכשיו...

נרחיב את P מהקטעים הפתוחים (או מהקב' הפתוחות, כמו בדוגמה $\{0,1\}^\infty$), לכל σ-שדה בורל.

P מוגדר על הקטעים הפתוחים ולכן על הסגורים ומכאן על איחודים (מספר זרים) של כאלה.

נניח $A\ell$ היא קב' כל הקטעים הפתוחים ואיחודיהן.

דרישה אחת היא כאשר $b\in B$ (b קב' בורל) ! $A_1,A_2\in A$ כך ש

$A_1 \subseteq b \subseteq A_2$, אז $P(A_1)\le P(b)\le P(A_2)$

נתאר לכל $\Omega=\{0,1\}^\infty$, $B=\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega \mid \lim \bar{x}_n \text{ קיים}\}$

$P(B)=?$ $\qquad B=\bigcap_K \bigcup_N \bigcap_{n,m\ge N} D_{n,m,k}$

נקבע N,k ונגדיר $A_{N,k}=\bigcap_{n,m\ge N} D_{n,m,k}$

עבור k קבוע $\bigcup_N A_{N,k}$

$$P\left(\bigcup_N A_{N,k}\right)=\lim_{j\to\infty} P\left(\bigcup_{N=1}^{j} A_{N,k}\right)$$

$$P(B)=\lim_K P\left(\bigcap_{k=1}^{K}\bigcup_N A_{n,k}\right)$$

לקחנו את A והגדרנו את P על האלגברה שנוצרת ע"י A (שאומר על הקבוצה שמכילה את כל האיחודים והחיתוכים הסופיים של קבוצות ב-A).

משפט מתורת המידה והסתברות שניתן להרחיב את P לבורל B באופן יחיד.