**קונבולוציה**

אם $X$ ו- $Y$ ב"ת עם צפיפויות $f_X$ ו- $f_Y$, ו- $Z = X + Y$, אזי

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(s) \cdot f_Y(z-s) ds$$

**טרנספורמציות**

*חד-מימד:*

$$Y = g(X).$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_x(x) \cdot \frac{1}{|g'(x)|}$$

מציבים את כל נקודות המקור של $y$. (מבטאים את $x$ כביטוי של $y$)

$$f_Y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right)\left|g^{-1}(y)\right|' = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}$$

**תוחלת של טרנספורמציה**

$$Y = g(X)$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(X) \cdot f_X(x) dx$$

עובד גם במקרה של שני משתנים:

$$Z = \varphi(X,Y)$$

$$E(Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(X,Y) \cdot f_{(X,Y)}(x,y) dx \cdot dy$$

**פונקציה יוצרת מומנטים**

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot e^{tx} dx$$

$$E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}$$

אם $X$ ו- $Y$ מ"מ בעלי תומך חסום (מקרה פרטי: חסומים), ומתקיים $E(X^n) = E(Y^n)$ לכל $n$, אזי $X \sim Y$.

**פונקציה יוצרת מומנטים של סכום של משתנים מקריים ב"ת, היא מכפלת הפונקציות יוצרות מומנטים שלהם.**

**סדרות של מאורעות**

- $\limsup A_n = \{A_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$
  $\liminf A_n = \{A_n \text{ eventually}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$
- $P(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$
  $P(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right)$
- $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$
- $P(\limsup A_n) = 1 - P(\liminf A_n^c)$
- $\{A_n \text{ i.o.}\}^c = \{A_n^c \text{ eventually}\}, \{A_n \text{ eventually}\}^c = \{A_n^c \text{ i.o.}\}$
- Lim P(An) = P(lim An)

**אי שוויונות מרקוב וצ'ביצ'ב**

מרקוב: $P(X > a) \le \frac{1}{a} E(X)$ לכל $a > 0$. (דורש ש-X יהיה אי-שלילי כמעט תמי

צ'ביצ'ב: $P\left(|X - E(X)| > a\right) \le \frac{Var(X)}{a^2}$ לכל $a > 0$.

צ'ביצ'ב החד-צדדי: $P\left(X - E(X)\right) \le \frac{Var(X)}{Var(X) + a^2}$

קולמגורוב: תהי $X_1, \dots, X_n$ סדרה סופית של מ"מ ב"ת

$V(X_1) < \infty, \mu = 0$ נגדיר $S_k = X_1 + \dots + X_k$

אזי $P\left(\max_{1 \le k \le n} |s_k| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\text{var}(S_n)}{\varepsilon^2}$.

- אי-שוויון ינסן: $g(E(X)) \le E(g(X))$ עבור מ"מ $X$ אינטגרבילי ו- $g$ קמורה. בהוכחת הא"ש משתמשים בישר התומך: $\ell(t) = g(t - E(X)) + g(E(X)) \le g(t)$. אי השוויון נכון בגלל קמירות הפונקציה. לוקחים תוחלת, ומקבלים את אי השוויון.

**אי תלות**

- $X, Y$ יהיו בלתי תלויים אם מתקיים:
  $P(x \in A, y \in B) = P(x \in A) \cdot P(y \in B)$, לכל $A, B \in \mathbf{B}$.
- $X, Y$ בלתי תלויים $\Leftrightarrow F_{X,Y} = F_X \cdot F_Y \Leftrightarrow f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow F_{X|Y}(x) \overset{a.s}{=} F_X(x) . f_{X,Y} = g(x) \cdot f(y)$
- אם $\varphi, \psi$ פונקציות בורל, ו- $X, Y$ ב"ת אזי $\varphi(X), \psi(Y)$ בלתי תלויים.

**פונקציות הסתברות**

- $F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$
- $F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(s,t) \cdot ds \cdot dt$
- $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$
- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$

תנאי הכרחי לקיום צפיפות – רציפות של $F$.

F תמיד מונוטונית לא יורדת, שואפת לאחד באינסוף ואפס במינוס אינסוף, רציפה מימין. f תמיד אי-שלילית.

**פונקצית אחוזון**

הגדרה:

- $p \in (0,1)$ הוא $p$-אחוזון של $X$ אם $F_X(x-) \le p \le F_X(x+) = F(x)$.
- $X^* : (0,1) \to \mathbb{R}$ היא פונקצית אחוזון של $X$ אם לכל $p \in (0,1)$ $X^*(p)$ הוא $p$-אחוזון של $X$.
- $E(X^*) = E(X)$.
- $F_X$ עולה ממש (לא בהכרח רציפה) $\Leftrightarrow$ $X^*$ רציפה על $(0,1)$.
- $F_X$ רציפה $\Leftrightarrow$ $X^*$ עולה ממש (לא בהכרח רציפה)
- $X^*(p) \le x \Leftrightarrow F_X(x-) \le p$ $X^*(p-) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x+)$
  לא פורמלית, פונקצית האחוזון $X^*$ היא הפונקציה ההפוכה ל- $F_X$. פרט לנקודות הקפיצה של $F_X$. בנקודות הקפיצה ערך $X^*$ הוא ערך האטום.

- תומך:
  $$\text{SUPP}(X) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \forall \varepsilon > 0. P(x - \varepsilon < X < x + \varepsilon) > 0\right\}$$
  $$= \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \forall \varepsilon > 0. F_X(X + \varepsilon) - F_X(X - \varepsilon) > 0\right\}$$
- **זו הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמתקבלת בהסתברות 1**

**צפיפות משותפת**

אם $X$ ו- $Y$ ב"ת, אז $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) dy$$

אם $(X,Y)$ בעל צפיפות משותפת $f_{(X,Y)}$. אם $f_{(X,Y)}$ ניתנת לפירוק $f_{(X,Y)}(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ כש $g$ ו- $h$ בורל, אזי $X$ ו- $Y$ ב"ת.

**התפלגות מותנה**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) dx}$$

כשמשתנה אחד בדיד, מחליפים את ה- $f$ ב- $P$.

$$F_{X|Y=y}(x) = P(X \le x | Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(t) dt$$

$$E(X | Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=y}(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X | Y = y) f_Y(y) dy$$

$$P(A) = E(P(A|X)) = E(I_A) = E(E(I_A | X))$$

$$f_{X,Y} = E(f_{X,Y|Z})$$

$E(g(X)|Y) = \sum g(x) P(X = x | Y)$ :עבור ממ בדיד

$$P(X \le t, Y \le s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_X(x) * f_{Y|X=x}(y) dy dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f_X(x) * P(Y \le s | X = x) dx$$

**Uniform distribution**

Notation: $X \sim U(a,b)$

pdf: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ for $a < x < b$.

cdf: $F_X(x) = P(X \le x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x)$.

Expectation: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Variance: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Moment Function: MGF(t) = $\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

**Normal distribution:**

Notation: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

pdf: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Expectation: $E(X) = \mu$

Variance: $Var(X) = \sigma^2$.

Sum: If $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ are independent then $\Sigma_{i=1}^{n} X_i = N\left(\Sigma_{i=1}^{n}\mu_i, \Sigma_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

Moment Function: MGF(t) = $e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

**Exponential distribution:**

Notation: $X \sim \exp(\lambda)$

pdf: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)$

cdf: $F_X(x) = P(X \le x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \cdot I_{(0,\infty)}(x)$

Expectation: $E(X) = 1/\lambda$

Variance: $Var(X) = 1/\lambda^2$

Sum: If $X_1, \dots, X_k \sim \exp(\lambda)$ are independent then $\Sigma_{i=1}^{k} X_i \sim Gamma(k, \lambda)$.

Minimum: if $X_1, \dots, X_k \sim \exp(\lambda_i)$ then $\min\{X_1, \dots, X_k\} \sim \exp\left(\Sigma_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$

Moment Function: FMT(t) = $\frac{\lambda}{\lambda - t}$

**שונות**

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E\left((X - E(X))^2\right)$$
$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$$
$$Var(X) \le E\left((X-c)^2\right) \text{ for every } c \in \mathbb{R}.$$
$$Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}. P(X = c) = 1$$
$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$
$$= \text{Cov}(X, E(Y|X))$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \ -1 \le \rho \le 1$$

**תוחלת**

- $E(aX) = aE(X), \ E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X) = E(E(X|Y)), \ E(XY|X) = X \cdot E(Y|X)$
- $E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x) dx)$
  $= \int_{0}^{1} X^*(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$
- $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת ש"ה, וגם $E(|X_1|) < \infty$, אזי $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$.
- $X_1, \dots$ מ"מ ב"ת ש"ה, $E(|X_1|) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup \frac{X_n}{n} = +\infty\right) = 1$
- $E(|X|) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$

**הלמה של בורל-קנטלי**

יהיו $A_1, A_2, \ldots$ סדרת מאורעות. אזי

- אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אזי $\limsup A_n = 0$.
- אם $A_1, A_2, \ldots$ גם ב"ת, אזי $P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \\ 1 & \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \end{cases}$

**הלמה של קרונקר:**

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים, ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מונוטונית עולה לאינסוף. אזי אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ אזי $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{b_n} \to 0$.

**התכנסויות**

יהיו $X, X_1, X_2, \ldots$ מ"מ.

1. התכנסות כמעט תמיד ( $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ): $P(\{\omega | X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$
2. התכנסות בהסתברות ( $X_n \xrightarrow{p} X$ ): $\forall \varepsilon > 0. \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
3. התכנסות בממוצע: $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0$
4. התכנסות בממוצע ריבועי: $\lim_{n\to\infty} E((X_n - X)^2) = 0$

$1 \Rightarrow 2,\ 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$

כדי להראות (ברוב המקרים) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$:

מגדירים: $A_n = \{|X_n - X| < \varepsilon\}$, ומראים ש $P(\{A_n \text{ eventually}\}) = 1$.

וזה מתקיים $\Leftrightarrow$ $P(\{A_n^c \text{ i.o.}\}) = 0$. ואת זה אפשר לבדוק עם הלמה של בורל-קנטלי. מתקיים ש- $A_n^c = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ ובודקים האם $\Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) < \infty$.

כדי להראות $X_n \not\xrightarrow{a.s.} X$ מספיק להראות כי $P(\{A_n \text{ eventually}\}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(\{A_n^c \text{ i.o.}\}) = 1$ ואת זה מקבלים מבורל-קנטלי אם $\Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = \infty$

אבל פה נדרוש גם ש- $A_1^c, A_2^c, \ldots$ יהיו ב"ת.

**החוק החלש של המספרים הגדולים (WLLN)**

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה עם <u>תוחלת סופית</u>, ונסמן $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$, אזי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E(X_1)$.

**החוק החזק של המספרים הגדולים (SLLN)**

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה עם <u>תוחלת סופית</u>, ונסמן $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$, אזי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} E(X_1)$.

- $F_X$ רציפה אז $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$.

תכונה חשובה:

אם X ו- Y מתפלגים אחיד על D אז:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{Vol(D)} * 1_D$$

**משפטי ההתכנסויות המונוטונית והדומיננטית**

אלו הם תנאים מספיקים לחילופיות של סדר הגבול והתוחלת.

יהיו $Y, X, X_1, X_2, \ldots$ מ"מ.

<u>משפט ההתכנסות המונוטונית (MCT)</u>

אם $P(X_n \nearrow X) = 1$ וגם $E(|X_1|) < \infty$ אזי $\lim E(X_n) = E(\lim(X_n)) = E(X) \in (-\infty, \infty]$. (באופן דומה, עבור סדרה מונוטונית יורדת).

<u>משפט ההתכנסות הדומיננטית (DCT)</u>

אם $P(X_n \to X) = 1$ וגם לכל $n$ מתקיים ש- $|X_n| \leq Y$, וגם $E(|Y|) = E(Y) < \infty$ אזי

$$E(|X|) < \infty, \qquad E(|X_n - X|) \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = E(X) \in (-\infty, \infty)$$

**תכונת המגדל**

עבור סיגמה שדות: אם $g_1 \subset g_2 \subset F$ אז

$$E(X | g_1) = E(E(X | g_1) | g_2) = E(E(X | g_2) | g_1)$$

עבור מ"מ:

$$E(X | Y) = E(E(X | Y, Z) | Y) = E(E(X | Y) | Y, Z)$$

**משפט שלושת הטורים של קולמוגורוב**

יהיו $X_1, X_2 \ldots$ מ"מ ב"ת ולכל $c > 0$ נסמן $X_n^{(c)} = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq c\}}$, $S_n^{(c)} = X_1^{(c)} + \ldots + X_n^{(c)}$.

משפט: $X_1, X_2 \ldots$ מ"מ ב"ת נקבע $c > 0$ ונתבונן בטורים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c)$ .2 $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^{(c)})$ .3 $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n^{(c)})$

אזי: 1) $S_n$ מתכנס כמעט תמיד $\Leftarrow$ לכל $c > 0$ (1) ו(3) קטנים מאינסוף ו(2) מתכנס.

2) אם (1) (2) ו (3) מתכנסים עבור $c > 0$ כלשהו $S_n$ מתכנס כמעט תמיד.

**התכנסות בהתפלגות**

<u>הגדרה:</u>

- סדרת פונקציות התפלגות $\{F_n\}_n$ על $\mathbb{R}$ מתכנסת <u>חלש</u> לפונקצית ההתפלגות הגבולית $F$ אם $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ לכל $x \in C(F)$ (לכל נקודת רציפות של $F$).
- $X_n \xrightarrow{D} X$ אם $F_{X_n} \xrightarrow{weak} F_X$.

<u>משפט:</u> התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות. ההיפך אינו נכון, אלא אם כן ההתפלגות הגבולית מנוונת בנקודה בודדת)

**משפט הגבול המרכזי**

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת $\mu$ ושונות (סופית) $\sigma^2$. נסמן $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$. אזי $\frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

הגבול המרכזי של לרר (**CLLT – Centeral Lerher Limit Theorem**):

$X_1, \ldots, X_n$ סדרה סופית של מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת 0 ו-**MGF** קיימת. אזי:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} Xn}{\sqrt{n}} \to^{D} N(0, \sigma^2)$$

$$V(X_1) = \sigma^2$$