הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

29 במאי 2017

1 תהליכים מסתעפים

בכל דור, כל פריט מוליד מספר צאצאים לפי התפלגות X באופן בלתי תלוי בכל שאר הפריטים ובכל הדורות הקודמים. מה הסיכון להכחדות?

נגסה לפרמל:

X יהיה משתנה מקרי המקבל ערכים מתוך $\{0,1,2,\dots\}$. תהי $\left(X_n^{(k)}\right)_{n,k\geq 0}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים עם התפלגות שזהה לשל X. נגדיר $Z_0 = 1$, וכן

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

נסמן E את המאורע של הכחדה, כלומר

$$E = \{\exists n \ \ Z_n = 0\}$$

משפט 1.1 נניח כי $\mathbb{P}(X=1) < 1$. אזי $\mathbb{E}X > 1$ אם ורק אם $\mathbb{P}(E^c) > 0$.

הוכחה: נסמן $m = \mathbb{E}X$, ונסמן $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{X_i^{(k)} \mid k < n\right\}\right)$. נראה כי $\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = mZ_{n-1}$. נחשב:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(X_1^{(n-1)} + \cdots + X_{Z_{n-1}}^{(n-1)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(n-1)} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i^{(n-1)} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i^{(n-1)}\right) \mathbb{1}_{\{i < Z_{n-1}\}} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} m \mathbb{1}_{\{i < Z_{n-1}\}} = mZ_{n-1}
\end{aligned}$$

כעת, אם $m<1$, אזי

$$\mathbb{E}\left(Z_n\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z_n\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)=m\mathbb{E}\left(Z_{n-1}\right)=\cdots=m^n$$

ולכן

$$\mathbb{P}\left(Z_n\geq 1\right)\leq\mathbb{E}Z_n\leq m^n\to 0$$

במקרה השני, $m=1$, ונובע כי $\mathbb{E}\left(Z_n\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)=Z_{n-1}$, כלומר $\left(Z_n\right)$ מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$. ממשפט התכנסות המרטינגל נובע כי $Z_n\to Z_\infty$ כמעט תמיד. מצד שנית Z_n מקבל ערכים שלמים, וכן $\mathbb{P}\left(Z_n\to k\right)=0$ לכל $k\neq 0$, ולכן $Z_\infty=0$ כמעט תמיד. נפרמל:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_n\to k\right)&=\mathbb{P}\left(\exists N\ \ \forall n\geq N\ \ Z_n=k\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\forall n\geq N\ \ Z_n=k\right)=\\
&=\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\mathbb{P}\left(\forall N\leq n\leq M\ \ Z_n=k\right)=\\
&=\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\underbrace{\mathbb{P}\left(Z_{n+1}=k\mid Z_n=k\right)}_{\leq 1-\varepsilon}\cdots\underbrace{\mathbb{P}\left(Z_M=k\mid Z_{M-1}=k\right)}_{\leq 1-\varepsilon}\leq\\
&\leq\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\left(1-\varepsilon\right)^{M-N}=\lim_{N\to\infty}0=0
\end{aligned}$$

נותר לנו המקרה השלישי, כלומר $m>1$. אפשר להניח שהמשתנה X חסום, ובפרט $1<m<\infty$, שכן אפשר להחליף את X בסדרה $X\wedge M$ עבור M גדול מספיק. נקבל שוב $M_n=\frac{Z_n}{m^n}$ מרטינגל. מרטינגל זה אי שלילי, ולכן מתכנס כמעט תמיד אל M_∞. נשים לב כי

$$\left\{M_\infty>0\right\}\subseteq\left\{Z_n=\theta\left(m^n\right)\right\}\subseteq E^c$$

כדי לקבל שההסתברות לשרידה חיובית, מספק להראות כי $\mathbb{P}\left(M_\infty=0\right)<1$.
נטען כי $\sup_n\mathbb{E}\left(M_n^2\right)<\infty$ (תרגיל לבית) ובפרט $M_n\to M_\infty$ בנורמת L^2 (מהכיתה). לכן בפרט גם בנורמת L^1, כלומר $1=\mathbb{E}M_0=\mathbb{E}M_n\to\mathbb{E}M_\infty$, כלומר $\mathbb{E}M_\infty=1$, ובפרט $\mathbb{P}\left(M_\infty=0\right)<1$. ■

שאלה האם $E^c=\left\{M_\infty=0\right\}$ כמעט תמיד?

תשובה תנאי הכרחי ומספיק הוא $\mathbb{E}\left(X\log\left(1+X\right)\right)<\infty$. בבית נראה את זה עבור המקרה בו $\mathrm{Var}\left(X\right)<\infty$, ונחשב כי $\mathrm{Var}\left(M_\infty\right)=\frac{\mathrm{Var}(X)}{m(m-1)}$.