<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

ⓒ ארזים

22 במאי 2017

1 סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים

משפט 1.1 יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}X_n = 0$ לכל n. אז אם X_n חסומים אזי

$$\sum_n \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty \iff \mathbb{P}\left(\exists \sum_n X_n\right) = 1$$

אם X_n לא חסומים, רק הגרירה בכיוון $\Rightarrow$ נכונה.

הערה 1.2 למעשה ההוכחה מראה שאם X_n חסומים וכן

$$\mathbb{P}\left(\sup_N \left|\sum_{n=1}^N X_n\right| < \infty\right) > 0$$

אזי נובע כי

$$\sum_n \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty$$

מסקנה 1.3 יהיו ε_n סימנים מקריים בלתי תלויים, ותהי $a_1, a_2, \ldots$ סדרה קבועה. אזי אם $\sum a_n^2 < \infty$ אזי $\sum \varepsilon_n a_n$ מתכנס כמעט תמיד, ואם $\sum a_n = \infty$ אזי $\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n$ לא חסומה לפי N כמעט תמיד.

נעבור לדון במשחק הטלות מטבע - אנחנו מטילים מטבע הוגן שוב ושוב עד שמופיע רצף יעד מסויים. שואלים מה תוחלת זמן המשחק. למשל אם הרצף הוא HT, תוחלת הזמן היא 4, ואם הרצף הוא HH תוחלת הזמן היא 6.

תרגיל כמה זמן בתוחלת לוקח לקוף, שמקליד כל אות בהתפלגות אחידה מבין 26 האפשרויות, להקליד $ABRACADABRA$?

פתרון (בלי כל הפרטים) בכל זמן n מגיע שחקן חדש ומהמר את כל הונו על האות A. אם הפסיד, הולך הביתה. אם הצליח מקבל 26 לכל יחידת השקעה וממשיך להמר באותו

אופן. אזי נגדיר X_n להיות סך ההון בידי n השחקנים הראשונים בזמן n, ונגדיר Y_n להיות סך ההון ההתחלתי שנכנס על זמן n - כלומר קבוע n. נגדיר

$$M_n = X_n - Y_n$$

וזהו מרטינגל. נגדיר T להיות הזמן שבו מופיעה המילה לראשונה. אזי

$$X_T = 26^{11} + 26^4 + 26 = C$$

ההון של מי שהצליח למצוא את כל המילה ועוד ההון של מי שהתחיל את המילה במיקום הנכון (הרצף $ABRA$ מופיע פעמיים, והכל נגמר עם A). ממשפט העצירה נקבל

$$0 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_T = C - \mathbb{E}T$$
$$\mathbb{E}T = C = 26^{11} + 26^4 + 26$$

כעת נדבר על תהליך הסתעפות. נתון משתנה מקרי X המקבל ערכים שלמים אי שליליים. בדר 0 יש פריט יחיד. בכל דור כל פריט מוליד מספר צאצאים מקרי לפי ההתפלגות של X באופן בלתי תלוי. נסמן $X_j^{(i)}$ את הפריט j בדור i, ואלה כולם משתנים מקריים בלתי תלויים. נסמן Z_n את מספר הפריטים בדור n, כלומר

$$Z_{n+1} = X_1^{(n)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n)}$$
$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(n)} \mathbb{1}_{\{Z_n \geq k\}}$$

נתעניין במאורע

$$E = \{extinction\} = \{\exists n \;\; Z_n = 0\}$$
$$E^c = \{survival\} = \{\forall n \;\; Z_n > 0\}$$

משפט 1.4 נניח כי $\mathbb{P}(X = 1) < 1$. אזי

$$\mathbb{P}(E^c) > 0 \iff \mathbb{E}X > 1$$

הוכחה: נסמן $m = \mathbb{E}X$. ראשית נניח כי $m < 1$. אזי

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_1, \ldots, Z_n) = mZ_n$$

שכן אגף שמאל הוא גם

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_k^{(n)} \mathbb{1}_{\{Z_n \geq k\}} \mid Z_1, \ldots, Z_n\right) = \sum_k \mathbb{1}_{\{Z_n \leq k\}} \mathbb{E}X_k^{(m)} = mZ_n$$

לכן נקבל כי

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n \mid Z_{n-1})) = \mathbb{E}(mZ_{n-1}) = m\mathbb{E}(Z_{n-1})$$

ולכן קיבלנו $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$. ממרקוב נקבל

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n) = m^n \to 0$$
$$\mathbb{P}(E^c) = \lim_n \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$$

במקרה השני, $m = 1$. נשים לב כי Z_n מרטינגל אי שליי. לכן $Z_n \to Z_\infty$ כמעט תמיד. מצד שני, $\mathbb{P}(Z_n \to c) = 0$, עבור $c > 0$, ולכן $Z_\infty = 0$ כמעט תמיד. לכן $\mathbb{P}(E^c) = 0$.
יש גם מקרה שלישי - $m > 1$. לא נספיק היום, אבל בבית נראה משהו מעט חזק יותר תחת הנחת מומנט שני. ■