הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

15 במאי 2017

1 מרטינגלים

ניזכר בהגדרות הבאות, בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

הגדרה 1.1 פילטרציה היא סדרה עולה של σ אלגבראות $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$.

הגדרה 1.2 מרטינגל הוא סדרת משתנים מקריים $X_0, X_1, \ldots$ המקיימים:

1. $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ לכל n.
2. $(X_n)_n$ מותאם לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$.
3. $$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

תרגיל יהי (X_n)מטרינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$. יהיו $(\mathcal{H}_n)_n$, $(\mathcal{G}_n)_n$ פילטרציות כך שלכל n מתקיים

$$\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{H}_n$$

האם (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציות $(\mathcal{G}_n)_n$, $(\mathcal{H}_n)_n$?

פתרון כן, ולא.

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}_n) = X_n$$

וזהו מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{G}_n$.
ניתן דוגמה נגדית עבור $(\mathcal{H}_n)_n$. ניקח $\xi_1, \xi_2, \cdots \sim U\{-1,1\}$ בלתי תלויים. נגדיר

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$
$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$
$$\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{n+1}$$

אכן (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$, אבל לא ביחס לפילטרציה $(\mathcal{H}_n)$, כי

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{H}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) = X_{n+1} \neq X_n$$

מסקנה 1.3 אם (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$, אזי הוא מרטינגל גם ביחס לפילטרציה הטבעית $(\mathcal{G}_n)_n$ המוגדרת על ידי

$$\mathcal{G}_n = \sigma\left(X_1, \ldots, X_n\right)$$

הוכחה: מספיק להראות $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, כלומר צספיק להראות $\sigma\left(X_1\right), \ldots, \sigma\left(X_n\right) \subseteq \mathcal{F}_n$. אכן

$$\sigma\left(X_k\right) \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$$

כאשר $0 \leq k \leq n$. ∎

למה 1.4 נניח כי (X_n) תת מרטינגל, ונניח כי $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קמורה עם $\mathbb{E}\left|\varphi\left(X_n\right)\right| < \infty$ לכל n.

1. אם (X_n) מרטינגל אזי $\varphi\left(X_n\right)$ תת מרטינגל.
2. אם φ עולה אזי $\varphi\left(X_n\right)$ תת מרטינגל.

הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(X_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right)$$

כאן השתמשנו באי שוויון ינסן. מכאן נקבל את הנדרש, פעם אחת על ידי שוויון של אגף ימין לערך $\varphi\left(X_n\right)$, ופעם אחת על ידי אי שוויון (לפי מונוטוניות φ). ∎

מסקנה 1.5 אם (X_n) מרטינגל, $\mathbb{E}\left(\left|X_n\right|^p\right) < \infty$ לכל n (עבור $p \geq 1$) אזי $\left(\left|X_n\right|^P\right)$ תת מרטינגל.

מסקנה 1.6 אם (X_n) תת מרטינגל, אזי $\left(X_n - a\right)^+ = \max\left(X_n - a, 0\right)$ תת מרטינגל.

דוגמה יהיו $\xi_1, \xi_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי לויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}\left(\xi_n\right) = 0$, $\operatorname{Var}\left(\xi_n\right) = 1$. נגדיר

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$
$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1, \ldots, X_n\right)$$

אזי (X_n) מרטינגל, ומהמסקנה, $\left(X_n^2\right)$ תת מרטינגל. נגדיר $M_n = X_n^2 - n$. נראה כי (M_n) מרטינגל.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\left(X_n + \xi_{n+1}\right)^2 - (n+1) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= X_n^2 + 2X_n \underbrace{\mathbb{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)}_{=\mathbb{E}(\xi_{n+1})=0} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right)}_{=\mathbb{E}\left(\xi_{n+1}^2\right)=\mathrm{Var}(\xi_{n+1})=1} - n - 1 = \\ &= X_n^2 - n\end{aligned}$$

תרגיל יהיו $\xi_1, \xi_2, \dots \sim U\{-1,1\}$ בלתי תלויים. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ טבעיים כלשהם. נגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n & X_n \in \{a, -b\} \\ S_{n+1} & o/w \end{cases}$$

כאשר $S_0 = X_0 = 0$. הראו כי:

1. $(X_0, X_1, \dots) = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_T, S_T, S_T, \dots)$, כאשר

$$T = \min\{n \mid S_n \in \{a, -b\}\}$$

2. (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
3. הראו כי

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}(\exists n \ \ X_n \in \{a, -b\}) = 1$$

ומצאו את ההתפלגות של

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = S_T$$

פתרון 1 ברור, את 2 ראינו כבר בעבר. החלק הראשון של 3, להראות כי $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, יהיה בתרגיל בית, ולכן לא נעשה אותו כאן. אנחנו נמצא את ההתפלגות של X_∞.
נשים לב כי $S_T \in \{a, -b\}$. נסמן $p_n = \mathbb{P}(X_n = a), q_n = \mathbb{P}(X_n = -b)$, $p = \mathbb{P}(S_T = a)$. נשים לב שמתקיים

$$p_n \to p$$
$$q_n \to 1 - p$$

אזי

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T \le n}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T > n}) = \\ &= [\{T \le n\} = \{X_n\} \in \{a, -b\}] = a \cdot p_n - bq_n + c_n \mathbb{P}(T > n)\end{aligned}$$

כאשר $|c_n| \le \max\{a, b\}$. ניזכר כי $\mathbb{P}(T > n) \to 0$, ולכן כשניקח גבול נקבל

$$\begin{aligned}0 &= ap - b(1-p) \\ p &= \frac{b}{a+b}\end{aligned}$$