הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

8 במאי 2017

הגדרה 0.1 (תוחלת מותנה) בהינתן משתנה מקרי X על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ בעל תוחלת, ותת סיגמא אלגברה $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, התוחלת המותנה של X בהנתן $\mathcal{G}$ היא המשתנה המקרי $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ המקיים

1. $\mathbb{E}|Y| < \infty$.
2. Y מדיד לפי $\mathcal{G}$.
3. $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$ לכל $A \in \mathcal{G}$.

משפט 0.2 (משפט רדון ניקודים) יהיו μ, ν שתי מידות סיגמא סופיות על $(\Omega, \mathcal{F})$. אם לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

נסמן $\nu << \mu$ ונאמר כי המידה ν רציפה בהחלט ביחס למידה μ. במצב זה, קיימת פונקציה f מדידה כך שמתקיים

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

לכל $A \in \mathcal{F}$. אומרים כי f היא הצפיפות של המידה ν ביחס למידה μ, ומסמנים

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

תרגיל יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי תוחלת ונניח כי $\mathbb{E}[X \mid Y] = Y$ כמעט תמיד, $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$ כמעט תמיד. הוכיחו כי $X = Y$ כמעט תמיד.

פתרון כיוון שמתקיים $\mathbb{E}[X - Y \mid X] = 0$ כמעט תמיד, לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[X - Y \mid X \le t] = \mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_{X \le t}] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X - Y \mid X]\mathbb{1}_{X \le t}) = 0$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_{X \le t, Y \le t}] &= \mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_{X \le t}] - \mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_{X \le t, Y > t}] = \\ &= -\mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_{X \le t, y > t}]\end{aligned}$$

באופן סימטרי

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\,\mathbb{1}_{X\le t.Y\le t}\right]=-\mathbb{E}\left[(X-Y)\,\mathbb{1}_{Y\le t,X>t}\right]$$

לכן

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[(X-Y)\,\mathbb{1}_{Y\le t,X>t}\right]}_{\ge 0}=\underbrace{\mathbb{E}\left[(X-Y)\,\mathbb{1}_{X\le t,Y>t}\right]}_{\le 0}$$

לכן נובע כי

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\,\mathbb{1}_{X\le t,Y>t}\right]=0$$

קיבלנו משתנה מקרי אי חיובי שתוחלתו אפס - משמע הוא אפס כמעט תמיד. כלומר,

$$\mathbb{P}\left(X\le t<y\right)=0$$

אבל כעת

$$\{X<Y\}=\bigcup_{t\in\mathbb{Q}}\{X\le t<Y\}$$

ולכן $\mathbb{P}\left(X<Y\right)=0$. מסימטריה, $\mathbb{P}\left(Y>X\right)=0$, וסיימנו.

הערה 0.3 (התניה במאורע עם הסתברות אפס) נניח כי Y משתנה מקרי בעל תוחלת. נניח כי $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ תת סיגמא אלגברה. נניח כי $A_n\searrow A$ כך שמתקיים $\mathbb{P}\left(A>0\right)$, כאשר $A_n\in\mathcal{G}$. אזי

$$\frac{\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{A_n}\right]}{\mathbb{P}\left(A_n\right)}=\mathbb{E}\left[Y\mid A_n\right]\to\mathbb{E}\left[Y\mid A\right]=\frac{\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{A}\right]}{\mathbb{P}\left(A\right)}$$

כי מתקיים $\mathbb{P}\left(A_n\right)\to\mathbb{P}\left(A\right)$ (שכן $A_n\searrow A$) וכן $\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{A_n}\right]\to\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{A}\right]$, כי $|Y\mathbb{1}_{A_n}|\le|Y|$, Y בעלת תוחלת ולכן ניתן להפעיל את משפט ההתכנסות הנשלטת.

כעת, כאשר $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ ננסה להגדיר

$$\mathbb{E}\left[Y\mid A\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y\mid A_n\right]$$

דוגמא לבעייתיות: יהיו $X\sim U\left([0,1]\right)$, $Y\sim U\left([1,2]\right)$ בלתי תלויים. ראשית, נגדיר

$$A=\{X=0\}$$
$$A_n=\left\{X\le\frac{1}{n}\right\}$$
$$\mathcal{G}=\sigma\left(X\right)$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y \mid X=0\right]=\mathbb{E}\left[Y \mid A\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y \mid A_n\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y \mid X\leq\frac{1}{n}\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]=\frac{3}{2}$$

שנית, נגדיר

$$A=A'=\left\{\frac{X}{Y}=0\right\}$$
$$A'_n=\left\{\frac{X}{Y}\leq\frac{1}{n}\right\}$$
$$\mathcal{G}=\sigma\left(\frac{X}{Y}\right)$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}\left[Y \mid \frac{X}{Y}=0\right]=\mathbb{E}\left[Y \mid A'\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y \mid A'_n\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y \mid X\leq\frac{Y}{n}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq\frac{Y}{n}}\right]}{\mathbb{P}\left(X\leq\frac{Y}{n}\right)}$$

נתחיל בלחשב את $\mathbb{P}\left(X\leq\frac{Y}{n}\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X\leq\frac{Y}{n}\right)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X\leq\frac{Y}{n}}\right]=\int_0^1\left(\int_1^2\mathbb{1}_{x\leq\frac{y}{n}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\int_1^2\left(\int_0^1\mathbb{1}_{x\leq\frac{y}{n}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{y}{n}\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2n}$$

כעת:

$$\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq\frac{Y}{n}}\right]=\int_1^2\left(\int_0^1 y\mathbb{1}_{x\leq\frac{y}{n}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$
$$=\int_1^2\frac{y^2}{n}\,\mathrm{d}y=\frac{y^3}{3n}\Big|_1^2=\frac{7}{3n}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[Y \mid \frac{X}{Y}=0\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq\frac{Y}{n}}\right]}{\mathbb{P}\left(X\leq\frac{Y}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 2n}{3n\cdot 3}=\frac{14}{9}$$

אבל למעשה התננו באותו מאורע!