<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

© ארזים

26 באפריל 2017

1 סוגי התכנסות

תזכורת נניח כי X ,$X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים.

- נאמר כי $X_n \to X$ <u>כמעט תמיד</u> אם $\mathbb{P}\left(X_n \to X\right) = 1$.
- נאמר כי $X_n \to X$ <u>בהתסברות</u> אם $\mathbb{P}\left(\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right) \to 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

טענה 1.1 אם $X_n \to X$ כמעט תמיד אזי $X_n \to X$ בהסתברות.

הוכחה:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

■

דוגמא נבצע אינסוף הטלות מטבע בלתי תלויות. ההטלה שמספרה n מצליחה בהסתברות p_n. נסמן בתור A_n את המאורע בו ההטלה שמספרה n הצליחה. אזי:

- $\mathbb{1}_{A_n} \to 0$ כמעט תמיד אם ורק אם $\sum p_n < \infty$.
- $\mathbb{1}_{A_n} \to 0$ בהסתברות אם ורק אם $p_n \to 0$.

משפט 1.2 (אי שוויון צ'בישב) נניח כי X משתנה מקרי עם שונות סופית. אזי

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}X\right| \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{Var}X}{t^2}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}X\right| \geq t\right) = \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}X\right|^2 \geq t^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\left|X - \mathbb{E}X\right|^2\right)}{t^2} = \frac{\mathrm{Var}X}{t^2}$$

המעבר הלפני אחרון הוא לפי אי שוויון מרקוב. ■

משפט 1.3 (החוק החלש של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתים תלויים שווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות סופית. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

אזי $\mu \to \frac{S_n}{n}$ בהסתברות.

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\mathrm{Var}\left(S_n\right) = \mathrm{Var}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_n\right) = n\mathrm{Var}\left(X_1\right)$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|S_n - \mu n\right| > \varepsilon n\right) = \mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbb{E}S_n\right| > \varepsilon n\right) \le \frac{\mathrm{Var}S_n}{\varepsilon^2 n^2} \to 0$$

■

הערה 1.4 התנאי על סופיות השונות מיותר - נראה בעתיד.

משפט 1.5 (החוק החזק של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}X_n = 0$ לכל n, וכן

$$\sup_n \mathbb{E}\left(X_n^4\right) < \infty$$

נסמן

$$S_n = \sum_{I=1}^{n} X_i$$

אזי $0 \to \frac{S_n}{n}$ כמעט תמיד.

הוכחה: נראה בהרצאה. ■

הערה 1.6 לא צריך להניח את התנאי על המומנט הרביעי, אבל בתמורה כן צריך להניח שהמשתנים שווי התפלגות למשל.

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים וחיוביים, עם תוחלת $\mathbb{E}X_n = \mu$ לכל n וכן

$$\sup_n \mathbb{E}\left(X_n^4\right) < \infty$$

נגדיר

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

וכן

$$N_t = \sup \{n \mid T_n \le t\}$$

אזי $\frac{1}{\mu} \to \frac{N_t}{t}$ כמעט תמיד.

הוכחה: מהחוק החזק נובע כי $\mu \to \frac{T_n}{n}$ כמעט בכל מקום. מההגדרה של N_t נובע כי

$$T_{N_t} \le t < T_{N_t+1}$$

נחלק הכל בגורם N_t ונקבל

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \le \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

כעת, לכל n, מתקיים $T_n < \infty$ כמעט תמיד. לכן, $N_t \to \infty$ כמעט תמיד. לכן, כמעט תמיד,

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \to \mu, \frac{N_t+1}{N_t} \to 1$$

ולכן

$$\frac{t}{N_t} \to \mu$$

■

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \dots \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ בלתי תלויים. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

חשבו את

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\arctan\left(\frac{2S_n}{n} - X_1\right)\right)$$

פתרון מתקיים $\mathbb{E}\left(X_n^4\right) \leq 1$, ולכן מהחוק החזק נובע כי $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}$ כמעט תמיד. לכן,

$$\frac{2S_n}{n} - X_1 \to 1 - X_1$$

כמעט תמיד. $\arctan$ רציפה, ולכן, נוכל להגדיר

$$\begin{aligned} Z_n &= \arctan\left(\frac{2S_n}{n} - X_1\right) \\ Z &= \arctan\left(1 - X_1\right) \end{aligned}$$

ואז $Z_n \to Z$ כמעט תמיד. $\arctan$ חסומה, בפרט Z_n חסומות באופן אחיד, ולכן ממשפט ההתכנסות החסומה נקבל $\mathbb{E}Z_n \to \mathbb{E}Z$. נחשב:

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}\left(\arctan\left(1 - X_1\right)\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(1\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(0\right) = \frac{\pi}{8}$$