הסתברות למתמטיקאים

ⓒ ארזים

3 באפריל 2017

משפט 0.1 (למת בורל קנטלי השנייה) יהיו $\{A_n\}$ סדרה של מאורעות בלתי תלויים, המקיימים

$$\sum \mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 1$$

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. נתון

$$\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = \infty$$

נסמן

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(\limsup |X_n| \geq n\right) = 1$$

בפרט הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \infty\right) = 0$$

פתרון

$$\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(|X_1| \geq t\right)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_1| \geq n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| \geq n\right)$$

כעת, מהלמה של בורל קנטלי, נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(\limsup |X_n| \geq n\right) = 1$$

כעת, נשים לב כי

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n\left(n+1\right)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

אם $\frac{S_n}{n} \to 0$, אזי $\frac{X_{n+1}}{n+1} \to 0$. כעת,

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim \frac{S_n}{n} < \infty\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \to 0\right)$$

אבל $|X_n| \geq n$ עבור אינסוף ערכי n כמעט בכל מקום, ולכן

$$\limsup \frac{|X_n|}{n} = 1$$

כמעט בכל מקום. לכן נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \to 0\right) = 0$$

משפט 0.2 (חוק 0-1 של קולמוגורוב) תהי $X_1, \ldots, X_n$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגותץ נסתכל על $\tau = \bigcap \sigma\left(X_n, X_{n+1}, \ldots\right)$. אזי τ טריוויאלית, כלומר לכל $E \in \tau$ מתקיים $\mathbb{P}\left(E\right) \in \{0,1\}$.

תרגיל יהיו $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. נגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

האם ייתכן

$$\mathbb{P}\left(S_n - T_n \to \infty\right) > 0$$

פתרון לא! נגדיר $Z_n = X_n - Y_n$. Z_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, וכן סימטריים, כלומר $Z_n, -Z_n$ בעלי אותה התפלגות יהי E המאורע בו $S_n - T_n \to \infty$. למעשה,

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{n} Z_i \to \infty \right\}$$

E הוא מאורע זנבי, כלומר $E \in \tau$, ולכן $\mathbb{P}(E) \in \{0,1\}$. נשים לב כי

$$E' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} Z_i \to -\infty \right\}$$

ולכן גם $E' \in \tau$, כלומר $\mathbb{P}(E') \in \{0,1\}$. כעת, E, E' זרים, וכן סימטריים, כלומר $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E')$, וכעת

$$1 \geq \mathbb{P}(E \cup E') = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E') = 2\mathbb{P}(E)$$
$$\mathbb{P}(E) \leq \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(E) = 0$$

משפט 0.3 (הלמה של פאטו) אם $f_n \geq 0$ סדרת פונקציות מדידות במרחב הסתברות, נגדיר $f(x) = \liminf f_n(x)$, ואז f מדידה וכן

$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

משפט 0.4 (הלמה של שפה) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית. אם $X_n \to X$ כמעט תמיד, וכן

$$\mathbb{E}(|X_n|) \to \mathbb{E}(|X|)$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$$

ננסח מחדש את הלמה: יהי (S, Σ, μ) מרחב מידה סופי וממשי. יהיו $f_n, f \in L^1(\mu)$ כך שמתקיים $f_n \to f$ כמעט בכל מקום. אזי

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נוכיח את הניסוח השני. ראשית, בכיוון $\Rightarrow$:

$$\left|\int |f_n| \ \mathrm{d}\mu - \int |f| \ \mathrm{d}\mu\right| \leq \int ||f_n| - |f|| \ \mathrm{d}\mu \leq \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu$$

בכיוון $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \\ |f_n| + |f| - |f_n - f| &\geq 0 \end{aligned}$$

כעת, מהלמה של פאטו:

$$\begin{aligned} 2\int |f| \ \mathrm{d}\mu &= \int \liminf \left(|f_n| + |f| - |f_n - f|\right) \ \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int |f_n| + |f| - |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu = \\ &= \liminf \left(\int |f_n| \ \mathrm{d}\mu + \int |f| \ \mathrm{d}\mu - \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu\right) = 2\int |f| - \limsup \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

בסך הכל

$$\limsup \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu \leq 0$$

אבל זו סדרה אי שלילית, ולכן

$$\lim \int |f_n - f| \ \mathrm{d}\mu = 0$$

■