<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

ארזים ©

27 במרץ 2017

תזכורת אם $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots$ סיגמא אלגבראות, הם ייקראו בלתי תלויות אם

$$\mathbb{P}\left(F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}\right)=\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}\left(F_{i_j}\right)$$

כאשר $F_{i_j}\in\mathcal{F}_{i_j}$.

קל להכליל עבור מאורעות - ניקח $\mathcal{F}_i=\{\Omega,\emptyset,A_i,A_i^c\}$.

למה 0.1 (למת מערכות הפאי) נניח כי $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{F}$ סיגמא אלגבראות, $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2$ מערכות פאי שיוצרות אותן. אזי $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ בלתי תלויות אם ורק אם $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2$ בלתי תלויות.

תרגיל יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהיו $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$. נניח כי $\Omega\in\mathcal{I}_i$ לכל $1\leq i\leq 3$. הראו שאם לכל $I_i\in\mathcal{I}_i$, מתקיים

$$\mathbb{P}\left(I_1\cap I_2\cap I_3\right)=\mathbb{P}\left(I_1\right)\mathbb{P}\left(I_2\right)\mathbb{P}\left(I_3\right)$$

אזי $\sigma\left(\mathcal{I}_1\right),\sigma\left(\mathcal{I}_2\right),\sigma\left(\mathcal{I}_3\right)$ בלתי תלויות.

פתרון נראה תחילה כי $\sigma\left(\mathcal{I}_2\right),\sigma\left(\mathcal{I}_3\right)$ בלתי תלויות. $\Omega\in I_1$, ולכן $\mathbb{P}\left(I_2\cap I_3\right)=\mathbb{P}\left(I_2\right)\mathbb{P}\left(I_3\right)$ (ולכל אורך התרגיל, $\mathcal{I}_i\ni I_i$). לכן, מהלמה, נובע כי $\sigma\left(\mathcal{I}_3\right),\sigma\left(\mathcal{I}_2\right)$ בלתי תלויות. כעת, נגדיר

$$\mathcal{I}_4=\left\{I_2\cap I_3\mid I_2\in\mathcal{I}_2,I_3\in\mathcal{I}_3\right\}$$

נשים לב כי $\sigma\left(\mathcal{I}_4\right)=\sigma\left(\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3\right)$. כמו כן, $\mathcal{I}_4$ מערכת פאי שכן:

$$I_4\cap I_4'=\left(I_2\cap I_3\right)\cap\left(I_2'\cap I_3'\right)=\left(I_2\cap I_2'\right)\cap\left(I_3\cap I_3'\right)=I_2''\cap I_3''$$

כעת,

$$\mathbb{P}\left(I_1\cap I_4\right)=\mathbb{P}\left(I_1\cap I_2\cap I_3\right)=\mathbb{P}\left(I_1\right)\mathbb{P}\left(I_2\right)\mathbb{P}\left(I_3\right)=\mathbb{P}\left(I_1\right)\mathbb{P}\left(I_2\cap I_3\right)=\mathbb{P}\left(I_1\right)\mathbb{P}\left(I_4\right)$$

לכן $\sigma\left(\mathcal{I}_1\right), \sigma\left(\mathcal{I}_4\right)$ בלתי תלויות. כעת, יהיו $A_i \in \sigma\left(\mathcal{I}_i\right)$. אזי

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right)\mathbb{P}\left(A_2 \cap A_3\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right)\mathbb{P}\left(A_2\right)\mathbb{P}\left(A_3\right)$$

וסיימנו.

טענה 0.2 (הכללה פשוטה של בורל קנטלי 1) יהיו $A_1, A_2, \ldots$ מאורעות המקיימים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n^c \cap A_{n+1}\right) < \infty, \liminf \mathbb{P}\left(A_n\right) = 0$$

אזי $\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 0$.

הוכחה: נגדיר $E_n = A_n^c \cap A_{n+1}$. מבורל קנטלי, נקבל $\mathbb{P}\left(\limsup E_n\right) = 0$. לכן $\mathbb{P}\left(G_0 \cap G_1\right) = 1$, כאשר $G_0 = \liminf A_n, G_1 = \liminf A_n^c = \left(\limsup A_n\right)^c$. אבל,

$$\mathbb{P}\left(G_0\right) = \mathbb{P}\left(\liminf A_n\right) \leq \liminf \mathbb{P}\left(A_n\right) = 0$$

השתמשנו בלמה של פאטו. לכן $\mathbb{P}\left(G_1\right) = 1$, וסיימנו. ■

משפט 0.3 (למת בורל קנטלי השנייה) אם $A_1, A_2, \ldots$ מאורעות בלתי תלויים, אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 1$$

הוכחה תינתן בהרצאה. נראה שהדרישה לאי תלות הכרחית:
יהי $X \sim \operatorname{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$, ונגדיר

$$A_i = \{x = 1\}$$

אזי $\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = \frac{1}{2}$ בעוד הטור הוא וודאי ∞.

תרגיל מבצעים סדרה אינסופית של הטלות מטבע שמתפלגות $\operatorname{Ber}(p)$ באופן בלתי תלוי.
יהי A_n המאורע בו יש רצף של n הצלחות עד ההטלה 2^n (כולל). הראו כי

$$\mathbb{P}\left(\limsup\left(A_n\right)\right) = \begin{cases} 1 & p \geq \frac{1}{2} \\ 0 & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

פתרון נתחיל במקרה הקל ־ נניח כי $p < \frac{1}{2}$. נשים לב כי

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq 2^n p^n \Rightarrow \sum_k \mathbb{P}\left(A_k\right) < \infty$$

לכן מבורל קנטלי 1, נקבל $\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right) = 0$.
כעת נניח כי $p \geq \frac{1}{2}$. נגדיר $B_n \subseteq A_n$ להיות המאורע שבו יש רצף של n הצלחות בהטלות שבין $2^{n-1}+1$ ובין 2^n. אז כעת, B_n תלויים בהטלות שונות, ולכן בלתי תלויות. כמו כן,

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) \geq 1 - \left(1 - p^n\right)^{\left[\frac{2^{n-1}}{n}\right]} \geq \ldots\cdots \geq \frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

לכן סכום ההסבתרויות הוא אינסוף. מבורל קנטלי 2, נקבל כי B_n קורה אינסוף פעמים בהסתברות 1, ובפרט זה נכון גם עבור A_n.