<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

ⓒ ארזים

20 במרץ 2017

1 משפטים לגבי מידות

משפט 1.1 (משפט היחידות) יהיו μ,ν שתי מידות על (S,Σ), ותהי $\mathcal{I}$ מערכת פאי כך שמתקיים $\sigma\left(\mathcal{I}\right)=\Sigma$. אם $\mu\left(S\right)=\nu\left(S\right)<\infty$, וכן $\mu\mid_{\mathcal{I}}=\nu\mid_{\mathcal{I}}$, אזי $\mu=\nu$.

דוגמא נראה שהדרישה למערכת פאי היא הכרחית. ניקח $S=\{1,2,3,4\}$, $\Sigma=P\left(S\right)=2^{S}$, $\mathcal{I}=\{\{1,2\},\{1,4\}\}$. מכאן $\sigma\left(\mathcal{I}\right)=\Sigma$. המידה מתוארת על ידי

$$\mu\left(1\right)=\frac{1}{2},\mu\left(2\right)=0,\mu\left(3\right)=\frac{1}{2},\mu\left(4\right)=0$$
$$\nu\left(1\right)=0,\nu\left(2\right)=\frac{1}{2},\nu\left(3\right)=0,\nu\left(4\right)=\frac{1}{2}$$

משפט 1.2 (משפט הקיום) יהי (S,Σ) מרחב מדיד ותהי $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ תת אלגברה עם $\sigma\left(\Sigma_0\right)=\Sigma$. תהי $\mu_0:\Sigma_0\to[0,\infty]$ העתקה סיגמא אדיטיבית. אזי קיימת מידה μ על (S,Σ) המקיימת $\mu\mid_{\Sigma_0}=\mu_0$. אם $\mu_0\left(S\right)<\infty$ אזי המידה μ היא יחידה.

דוגמא נראה שהדרישה להעתקה סיגמא אדיטיבית היא הכרחית. ניקח בתור Σ_0 את האלגברה של כח האיחודים הסופיים של קטעים $(a,b]$, כאשר $a,b\in[-\infty,\infty]$ (בתוך $\mathbb{R}$). ניקח

$$\mu_0\left(A\right)=\begin{cases}1 & \exists\varepsilon>0\ \ (0,\varepsilon)\subseteq A\\ 0 & o/w\end{cases}$$

זו העתקה אדיטיבית. לא יכולה להיות הרחבה למידה, שכן

$$0=\mu\left(\emptyset\right)=\mu\left(\bigcap_{\varepsilon\to0}(0,\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\mu\left((0,\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to0}1=1$$

בסתירה.

2 משתנים מקריים ממשיים

הגדרה 2.1 משתנה מקרי ממשי על מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{F})$ הוא העתקה מדידה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

הערה 2.2 כאשר $h:S\to\mathbb{R}$, S מרחב טופולוגי, אזי נאמר כי h העתקת <u>בורל</u> אם h מדידה ביחס למרחב $(S,\mathcal{B}\left(S\right))$.

2.1 התפלגות ופונקציית ההתפלגות (המצטברת)

הגדרה 2.3 יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי ממשי על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. ההתפלגות של X:

$$\mathbb{P}_X=\mathbb{P}\circ X^{-1}$$

זו מידת הסתברות על $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}_X\left(A\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(A\right)\right)$$

הגדרה 2.4 פונקציית ההתפלגות של X היא

$$F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$$
$$F_X\left(x\right)=\mathbb{P}_X\left(\left(-\infty,x\right]\right)=\mathbb{P}\left(X\leq x\right)$$

הערה 2.5 האוסף $\pi\left(\mathbb{R}\right)$ של הקרניים $(-\infty,x]$ היא מערכת פאי שיוצרת את סיגמא אלגברת בורל. ממשפט היחידות, שני משתנים מקריים עם אותה פונקציית התפלגות הם שווי התפלגות.

תכונות של הפונקציה F_X:

1. F_X מונוטונית עולה.
2.

$$\lim_{x\to\infty}F_X\left(x\right)=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}F_X\left(x\right)=0$$

3. F רציפה מימין, כלומר

$$\lim_{\varepsilon\searrow0}F_X\left(x+\varepsilon\right)=F_X\left(x\right)$$

קיום של מידה עם פונקציית התלגות נתונה: אם F היא פונקצית התפלגות אזי קיימת מידת הסתרות $\mathbb{P}$ על $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ כך שמתקיים

$$F\left(x\right)=\mathbb{P}\left(\left(-\infty,x\right]\right)$$

3 מימוש של משתנים מקריים על מרחבי הסתברות שונים

יהי $X \sim \text{Ber}\left(\frac{2}{5}\right)$ משתנה מקרי, כלומר

$$\mathbb{P}\left(X=0\right)=\frac{3}{5},\mathbb{P}\left(X=1\right)=\frac{2}{5}$$

1. ניקח $\Omega=\{0,1\}$, $\mathcal{F}=2^{\{0,1\}}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{0\}\right)&=\frac{3}{5}\\ \mathbb{P}\left(\{1\}\right)&=\frac{2}{5}\\ X\left(\omega\right)&=\omega\end{aligned}$$

2. $\Omega=\{1,2,\ldots,5\}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$, כאשר

$$\mathbb{P}\left(\{i\}\right)=\frac{1}{5}$$

ונגדיר

$$X\left(\omega\right)=\begin{cases}1 & x\in\{1,4\}\\ 0 & x\in\{2,3,5\}\end{cases}$$

3. ניקח $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}\left([0,1]\right)$. $\mathbb{P}$ היא מידת לבג. ניקח $X\left(\omega\right)=\mathbb{1}_A\left(\omega\right)$ כאשר $A\subseteq[0,1]$ מדידה בורל עם מידה $\frac{2}{5}$. כאשר I קטע, מתקיים

$$\mathbb{P}_X\left(I\right)=\begin{cases}1 & \{0,1\}\in I\\ \frac{3}{5} & 0\in I,1\notin I\\ \frac{2}{5} & 0\notin I,1\in I\\ 0 & 0\notin I,1\notin I\end{cases}$$