# <u>הסתברות למתמטיקאים</u>

© ארזים

26 ביוני 2017

## 1 משפט הגבול המרכזי

**תרגיל** חשבו את

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathrm{Vol}\left(\left\{x\in[-1,1]^n \mid \sum x_i^{\frac{1}{3}} > \sqrt{n}\right\}\right)$$

**פתרון** נגדיר $X_1, X_2, \dots \sim U[-1,1]$ בלתי תלויים. במצב זה הגבול שלנו הוא

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum X_i^{\frac{1}{3}} > \sqrt{n}\right)$$

אז נגדיר $Y_i = X_i^{\frac{1}{3}}$, ואז $\mathbb{E}Y_i = 0$, וכן

$$\mathrm{Var}Y_i = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$$

ואז הגבול הוא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum Y_i > \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum Y_i}{\sqrt{\sum \mathrm{Var}\left(Y_i\right)}} > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}Y_1}}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}\left(0,1\right) > \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

**תרגיל** חשבו את

$$\limsup_{n\to\infty}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{x_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$$

**פתרון** נגדיר

$$X_i \sim U[0,1]$$

ונקבל

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

נרצה להוריד את התוחלת בשביל משפט הגבול המרכזי, ולכן נגדיר

$$Y_n=\frac{\left(X_1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(X_n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$$

וידוע לנו מהגבול המרכזי שמתקיים $Y_n\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, כאשר $\sigma^2=\mathrm{Var}\left(X_1-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Var}\left(X_1\right)=\frac{1}{12}$. אם כן, הגבול שלנו הוא

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\cos\left(Y_n+\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right)=\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\cos Y_n-\sin\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\sin Y_n\right)$$

$Y_n$ סימטרי ולכן $\mathbb{E}\left(\sin Y_n\right)=0$. נקבל

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\cos\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\mathbb{E}\left(\cos Y_n\right)=\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\cos Y_n\right)=$$
$$=\mathbb{E}\left(\cos\left(\mathcal{N}\left(0,1\right)\right)\right)=\cdots=e^{-\frac{\sigma^2}{2}}=e^{-\frac{1}{24}}$$

**תרגיל** יהיו $X,Y$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות וסימטריים, במובן שההתפלגות של $X,-X$ זהות, וגם של $Y,-Y$. נניח כי $\mathbb{E}X=0$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)=1$. הראו שאם $\left(X+Y\right)$, $\left(X-Y\right)$ בלתי תלויים, אזי $X$ מתפלג $\mathcal{N}\left(0,1\right)$.

**פתרון** נסמן $\varphi$ את הפונקציה האופיינית של $X$. ראשית, נראה כי

$$\varphi\left(2t\right)=\varphi\left(t\right)^4$$

לכל $t$. נחשב:

$$\begin{aligned}\varphi\left(2t\right)&=\mathbb{E}\left(e^{2itX}\right)=\mathbb{E}\left(e^{it\left(X+Y+X-Y\right)}\right)=\\&=\mathbb{E}\left(e^{it\left(X+Y\right)}\right)\mathbb{E}\left(e^{it\left(X-Y\right)}\right)=\\&=\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\mathbb{E}\left(e^{itY}\right)\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\mathbb{E}\left(e^{-itY}\right)=\\&=\varphi\left(t\right)^3\varphi\left(-t\right)\end{aligned}$$

מסימטריה של $X$, נקבל

$$\varphi\left(-t\right)=\mathbb{E}\left(e^{-itX}\right)=\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)=\varphi\left(t\right)$$

ובסך הכל אכן קיבלנו

$$\varphi\left(2t\right)=\varphi\left(t\right)^4$$

מכאן נקבל כמובן כי

$$\varphi\left(t\right)=\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n}$$

מכאן יש שתי דרכים להמשיך. נוכיח

$$\varphi\left(t\right)=e^{-\frac{t^{2}}{2}}$$

ונסיק את הנדרש. נגדיר

$$S_{N}=\frac{X_{1}+\cdots+X_{N}}{\sqrt{N}}$$

כאשר $X_i$ מתפלגים כמו $X$. נקבל

$$\varphi_{S_{N}}\left(t\right)=\mathbb{E}\left(e^{itS_{n}}\right)=\mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_{1}}{\sqrt{N}}}\right)^{N}=\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)^{N}$$

נציב $N=4^n$ ונקבל

$$\varphi_{S_{N}}\left(t\right)=\varphi\left(\frac{t}{2^{n}}\right)^{4^{n}}=\varphi\left(t\right)$$

לכן $S_N$ מתפלג כמו $X$, לכל $N=4^n$. ידוע לנו כי $S_N\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,1\right)$, ובפרט $\varphi_{S_N}\left(t\right)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$. זה קורה בפרט לאורך תת הסדרה $N=4^n$, ולכן

$$\varphi\left(t\right)=e^{-\frac{t^{2}}{2}}$$

וסיימנו. הדרך השנייה להוכיח את זה היא לחקות את ההוכחה של משפט הגבול המרכזי:

$$\varphi\left(t\right)=1-\frac{t^{2}}{2}+o\left(t^{2}\right)$$

וממשיכים משם.

**תרגיל** יהיו $X_1,X_2,\ldots,$ בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}X_1=0$, $0<\mathrm{Var}X_1<\infty$. נסמן $S_n=X_1+\cdots+X_n$. הראו כי

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{n}}{\sqrt{n}}=\infty$$

כמעט תמיד.

**פתרון** מחוק $0-1$ של קולמוגורוב, ההסתברות שהגבול הזה הוא יותר מאשר $C$ היא 0 או 1, לכל $C$. לכן,

$$\mathbb{P}\left(\limsup\frac{S_{n}}{\sqrt{n}}\geq C\right)\geq\mathbb{P}\left(\limsup\left\{ \frac{S_{n}}{\sqrt{n}}>C\right\} \right)\geq\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_{n}}{\sqrt{n}}>c\right)$$

המעבר הראשון הוא כי המאורעות מוכלים, והשני מפאטו. כעת, ממשפט הגבול המרכזי, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,1\right)$. לכן ההסתברות שהתחלנו איתה היא לפחות

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\mathcal{N}\left(0,\sigma^{2}\right)>c\right)>0$$

ולכן לכל $C$ הסיכוי לעבור אותו הוא 1. לכן שואפים לאינסוף כמעט תמיד.