הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

19 ביוני 2017

1 פירוק/הצגת ריס (Reisz)

משפט 1.1 יהי (X_n) תת מרינגל, ונניח כי

$$\sup_n \mathbb{E}\left(X_n^+\right) < \infty$$

אזי ניתן לכתוב $X_n = Y_n - Z_n$ באשר Y_n מרטינגל, Z_n על מרטינגל אי שלילי המתכנס לאפס כמעט תמיד ובנורמת L^1.

הוכחה: נראה תחילה כי (X_n) חסום בנורמת L^1.

$$\mathbb{E}\left|X_n\right| = \mathbb{E}X_n^+ + \mathbb{E}X_n^- \le 2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0$$

וזאת משום שמתקיים

$$\mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n^-$$

נשים לב כעת כי

$$X_n \le \mathbb{E}\left(X_{n+m} \mid \mathcal{F}_n\right) \le \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_{n+m+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{n+m+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

לכן הסדרה $\left(\mathbb{E}\left(X_{n+m} \mid \mathcal{F}_n\right)\right)_m$ עולה, וחסומה מלמטה על ידי משתנה מקרי אינטגרבילי - לכן

$$Y_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n\right)$$

מתכנס כמעט תמיד ובנורמת L^1 (כאשר $m \to \infty$). נשים לב שכעת

$$Y_n = \lim_m \mathbb{E}\left(X_{n+m+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \lim_m \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_{n+m+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

המעבר האחרון יוסבר בתרגיל הבית. כלומר, Y_n מרטינגל. נגדיר כעת $Z_n = Y_n - X_n$.
ברור שזהו סופר מרטינגל, ושהוא אי שלילי ממה שראינו קודם. כעת,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}Y_n - \mathbb{E}X_n &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n\right)\right) - \mathbb{E}X_n = \\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}X_m - \mathbb{E}X_n\end{aligned}$$

לכן נקבל $\mathbb{E}Z_n \to 0$. זהו סופר מרטינגל אי שלילי, ולכן $Z_n \to Z_\infty$ כמעט תמיד.
מפאטו, נובע שמתקיים

$$0 \le \mathbb{E}Z_\infty \le \lim_n \mathbb{E}Z_n = 0$$

ולכן $Z_\infty = 0$ כמעט תמיד. ■

2 פונקציות אופייניות

אם X משתנה מקרי ממשי, אזי

$$\varphi_X\left(\theta\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\theta X}\right)$$

דוגמה אם $U \sim U\left[-1,1\right]$, אזי $\varphi_U\left(\theta\right) = \frac{\sin\theta}{\theta}$. הסבר:

$$\varphi_U\left(\theta\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\theta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{e^{i\theta x}}{i\theta}\ |_{-1}^{1} = \frac{\sin\theta}{\theta}$$

תרגיל יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. הראו שלא ייתכן שהמשתנה $X - Y$ מתפלג אחיד בקטע $\left[-1,1\right]$.

פתרון נניח שכן

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\theta} &= \sin_{X-Y}\left(\theta\right) = \varphi_X\left(\theta\right)\varphi_{-Y}\left(\theta\right) = \varphi_X\left(\theta\right)\varphi_Y\left(-\theta\right) = \varphi_X\left(\theta\right)\varphi_X\left(-\theta\right) = \\ &= \varphi_X\left(\theta\right)\overline{\varphi_X\left(\theta\right)} = \left|\varphi_X\left(\theta\right)\right|^2\end{aligned}$$

אגף ימין אי שלילי ואגף שמאל לא, וזו סתירה כמובן.

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות. נניח כי $X_n \to X$ בהסתברות.
הראו כי X קבוע כמעט תמיד.

פתרון נניח בשלילה כי X אינו קבוע. אזי קיימים $\varepsilon > 0$, $s < t$ המקיימים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \le s\right) \ge \varepsilon \\ \mathbb{P}\left(X \ge t\right) \ge \varepsilon\end{aligned}$$

נגדיר כעת

$$\delta = \frac{t-s}{3}$$

ואז

$$\mathbb{P}\left(X_n \le s+\delta\right) \ge \mathbb{P}\left(X \le s\right) - \mathbb{P}\left(|X_n - X| \ge \delta\right)$$
$$\liminf_n \mathbb{P}\left(X_n \le s+\delta\right) \ge \mathbb{P}\left(X \le s\right) \ge \varepsilon$$

ולכן $\mathbb{P}\left(X_n \le s+\delta\right) \ge \frac{\varepsilon}{2}$ עבור n גדול מספיק, וכך גם $\mathbb{P}\left(X_n \ge t+\delta\right) \ge \frac{\varepsilon}{2}$. כעת

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X_m| > 2\varepsilon\right) \le \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

שני אלה הולכים לאפס, ולכן

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X_m| \ge \delta\right) \to 0$$

אבל הסיכון הזה הוא לפחות $\mathbb{P}\left(X_n \le s+\delta, x_m \ge t-\delta\right) \ge \varepsilon^2$, בסתירה.