הסתברות למתמטיקאים

ⓒ ארזים

12 ביוני 2017

משפט 0.1 (אי שוויון תת המרטינגלים של Doob) יהי (Z_n) תת מרטינגל אי שלילי. אזי לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{0\le k\le n} Z_k \ge \lambda\right) \le \mathbb{E}\left(Z_n \mathbb{1}_{\left\{\sup\limits_{0\le k\le n} Z_k \ge \lambda\right\}}\right) \le \mathbb{E}\left(Z_n\right)$$

נשים לב שאי שוויון זה הוא למעשה הכללה של אי שוויון מרקוב.

הוכחה: נגדיר

$$F = \left\{\sup_{0\le k\le n} Z_k \ge \lambda\right\}$$
$$F_i = \left\{Z_0, \ldots, Z_{k-1} < \lambda, Z_k \ge \lambda\right\}$$

ואז יש איחוד זר

$$F = \bigcup_{i=0}^{n} F_i$$

כעת,

$$\mathbb{E}\left(Z_n \mathbb{1}_{F_k}\right) \ge \mathbb{E}\left(Z_k \mathbb{1}_{F_k}\right)$$

ולכן

$$\lambda \mathbb{P}\left(F\right) = \lambda \sum_{k\le n} \mathbb{P}\left(F_k\right) \le \sum_{k\le n} \mathbb{E}\left(Z_n \mathbb{1}_{F_k}\right) = \mathbb{E}\left(Z_n \mathbb{1}_F\right)$$

■

מסקנה 0.2 (אי שוויון קולמוגורוב) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ לכל n. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$$

אז לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\lambda^2 \mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k| \ge \lambda\right) \le V_n$$

נשים לב שאי שוויון זה הוא למעשה הכללה של אי שוויון צ'בישב.

הוכחה: S_n מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

כעת, כיוון שהפונקציה $\varphi(x) = x^2$ קמורה, נובע כי $\left(S_n^2\right)$ תת מרטינגל. כעת המסקנה נובעת מאי שוויון דוב:

$$\lambda^2 \mathbb{P}\left(\sup_{k\le n} |S_k| \ge \lambda\right) = \lambda^2 \mathbb{P}\left(\sup_{k\le n} S_k^2 \ge \lambda^2\right) \le \mathbb{E}\left(S_n^2\right) = \mathrm{Var}(S_n) = V_n$$

■

דוגמא לשימוש באי שוויון דוב, אבל ללא הוכחה: אם (X_n) בלתי תלויים, וכן $X_n \sim N(0,1)$, ונגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

נשים לב שמתקיים $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, ואז

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = 1$$

כמעט תמיד.

משפט 0.3 (אי שוויון אזומה־הופדינג) יהי (M_n) מרטינגל ונניח כי $|M_k - M_{k-1}| \le C_k$ כמעט תמיד. אזי לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n} M_k \ge M_0 + \lambda\right) \le e^{-\frac{\lambda^2}{2\sum_{k=1}^{n} C_k^2}}$$

הוכחה: נצטרך טענת עזר:

טענה 0.4 אם Y משתנה מקרי עם $\mathbb{E}(Y)=0$ וכן $|Y|\le c$ כמעט תמיד, אזי

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right)\le\cosh(\theta c)\le e^{\frac{\theta^2c^2}{2}}$$

לכל $\theta\in\mathbb{R}$.

את הטענה הזו נוכיח בתרגיל בית. בינתיים, נגדיר $X_k=M_k-M_{k-1}$. אזי

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n}M_k\ge M_0+\lambda\right)=\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n}e^{\theta(M_k-M_0)}\ge e^{\theta\lambda}\right)$$

כעת, מאי שוויון דוב ומכך שהסדרה $\left(E^{\theta(M_k-M_0)}\right)$ היא תת מרטינגל אי שלילי (כי אקספוננט זו פונקציה קמורה), מקבלים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n}e^{\theta(M_k-M_0)}\ge e^{\theta\lambda}\right)\le\frac{\mathbb{E}\left(e^{\theta(M_n-M_0)}\right)}{e^{\theta\lambda}}&=\frac{1}{e^{\theta\lambda}}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{\theta X_k}\right)=\\&=e^{-\theta\lambda}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{\theta X_k}\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)=\\&=e^{-\theta\lambda}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1}e^{\theta X_k}\mathbb{E}\left(e^{\theta X_n}\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\le\\&\le e^{-\theta\lambda}e^{\frac{\theta^2C_n^2}{2}}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1}e^{\theta X_k}\right)\le\cdots\le\\&\le e^{-\theta\lambda}e^{\frac{\theta^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}C_k^2}\end{aligned}$$

נסמן כעת

$$c=\sum_{k=1}^{n}C_k^2$$

ונציב $\theta=\frac{\lambda}{c}$, ונקבל

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n}e^{\theta(M_k-M_0)}\ge e^{\theta\lambda}\right)\le e^{-\theta\lambda}e^{\frac{\theta^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}C_k^2}\le e^{-\frac{\lambda^2}{c}}\cdot e^{\frac{\lambda^2}{2c^2}c}=e^{-\frac{\lambda^2}{2c}}$$

■

יישום $G(n,p)$ הוא גרף מקרי על n קודקודים כאשר קשת אפשרית מבין $\binom{n}{2}$ האפשרויות נמצאת בגרף בהסתברות p, באופן בלתי תלוי בשאר הקשתות. $\chi(G)$ הוא מספר הצביעה של G, כלומר המספר המינימלי של צבעים שבו אפשר לצבוע את G כך שכל שני קודקודים שיש ביניהם קשת יהיו בעלי צבע שונה.

משפט 0.5 (שמיר ספנסר) יהי $n \geq 1$ ויהי $0 < p < 1$. יהי $G \sim G(n,p)$. נסמן $c = \mathbb{E}(\chi(G))$. אזי

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{X}(G) - c| > \lambda\sqrt{n-1}\right) < 2e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

לכל $\lambda > 0$.

הוכחה: עבור $1 \leq k \leq n$ נגדיר את $\mathcal{F}_k$ להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי המשתנים המקריים המשוייכים לקשתות $\{i,j\}$ עם $1 \leq i,j \leq k$. נגדיר

$$X_k = \mathbb{E}(\chi(G) \mid \mathcal{F}_k)$$

אזי $X_1, \ldots, X_n$ מרטינגל (הסתרה - ראינו דברים כאלה בשיעור). כמו כן, $X_1 = c$, $X_n = \chi(G)$. נשים לב שאם H, H' הם תת גרפים של K_n (הגרף השלם על n קודקודים) שנבדלים בקודקוד אחד בלבד, אזי

$$|\chi(H) - \chi(H')| \leq 1$$

מכאן נקבל

$$|X_k - X_{k-1}| \leq 1$$

כמעט תמיד. מכאן נוכל להפעיל את אי שוויון אזומה־הופדינג:

$$\mathbb{P}\left(\chi(G) - c \geq \lambda\sqrt{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(X_n - X_1 \geq \lambda\sqrt{n-1}\right) \leq e^{-\frac{\left(\lambda\sqrt{n-1}\right)^2}{2(n-1)}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

עושים אותו דבר עם מינסוים ומקבלים את האי שוויון עם ערך מוחלט. ∎