הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

5 ביוני 2017

1 נוסחאות וואלד (Wald)

משפט 1.1 יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות עם $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. נגדיר $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, וכן $\mathcal{F}_n$ להיות הפילטרציה הטבעית. יהי T זמן עצירה עם $\mathbb{E}T < \infty$. אזי

$$\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}T$$

וכן אם $\mathbb{E}X_1 = 0, \mathrm{Var}X_1 < \infty$ אזי $\mathrm{Var}\left(S_T\right) = \mathrm{Var}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(T\right)$.

הוכחה: נשים לב שהתהליך $S_n - \mu n$ מרטינגל (כאשר $\mu = \mathbb{E}X_1$). ממשפט העצירה עבור זמן העצירה $T \wedge n$, נקבל

$$\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}\right) = \mu\mathbb{E}\left(T \wedge n\right)$$

ממונוטוניות $\mathbb{E}\left(T \wedge n\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}T$. נותר להראות כי $\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}S_T$. נשים לב שמתקיים

$$\left|S_{T\wedge n}\right| = \left|\sum_{k=1}^{T\wedge n} X_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|X_k\right| \mathbb{1}_{\{T\ge k\}}$$

וממשפט ההתכנסות הנשלטת מספיק להראות

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left|X_k\right| \mathbb{1}_{\{T\ge k\}}\right) < \infty$$

נחשב:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left|X_k\right| \mathbb{1}_{\{T\ge k\}}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left|X_k\right| \mathbb{1}_{\{T\ge k\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left(\left|X_k\right| \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)}_{\mathbb{E}|X_k| = \mathbb{E}|X_1|} \mathbb{1}_{\{T\ge k\}}\right) = \\
&= \mathbb{E}\left|X_1\right| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(T \ge k\right) = \mathbb{E}\left|X_1\right| \mathbb{E}T < \infty
\end{aligned}$$

לגבי החלק השני, ננסח טענת עזר, שאותה נראה בשיעורי הבית:

טענה 1.2 נניח כי (M_n) מרטינגל, T זמן עצירה סופי כמעט תמיד וכן $M_{T\wedge n} \to M_T$ בנורמת L^1. אזי

$$\mathbb{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_n\right) = M_n$$

על המאורע $\{T \geq n\}$.

מכאן נוכל להסיק את החלק השני של המשפט.
ראשית נטען שמתקיים

$$\mathbb{E}\left(M_T^2 \mathbb{1}_{T\geq n}\right) = \mathbb{E}\left(M_n^2 \mathbb{1}_{T\geq n}\right) + \mathbb{E}\left(\left(M_T - M_n\right)^2 \mathbb{1}_{T\geq n}\right)$$

נראה זאת. נרשום

$$\begin{aligned} M_T &= M_n + \left(M_T - M_n\right) \\ M_T^2 &= M_n^2 + \left(M_T - M_n\right)^2 + 2M_n\left(M_T - M_n\right) \end{aligned}$$

נרצה להראות אם כן $\mathbb{E}\left(M_n\left(M_T - M_n\right)\mathbb{1}_{T\geq n}\right) = 0$. מספיק להראות את זה בהינתן $\mathcal{F}_n$, וזה נובע מטענת העזר. כעת, נחזור להוכחת המשפט שלנו. נסמן

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}X_1$$

ונגדיר מרטינגל

$$M_n = S_n^2 - \sigma^2 n$$

ממשפט העצירה על זמן העצירה $T \wedge n$ נקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\right) &= \mathbb{E}M_0 = 0 \\ \mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^2\right) &= \sigma^2 \mathbb{E}\left(T \wedge n\right) \end{aligned}$$

שוב אגף ימין ישאף ממונוטוניות למה שרצינו. נשאר להראות כי $\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^2\right) \to \mathbb{E}\left(S_T^2\right)$.
נשים לב שאלה שונויות, שכן התוחלות הן 0 (מהחלק הראשון של המשפט). כעת, נוכל לרשום

$$S_{T\wedge n}^2 = S_T^2 + \left(S_n^2 - S_T^2\right)\mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$$

ומהמקסנה נובע שמתקיים

$$\mathbb{E}\left(\left(S_n^2 - S_T^2\right)\mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\right) \leq 0$$

כלומר

$$\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^{2}\right)\leq\mathbb{E}\left(S_{T}^{2}\right)$$

ולכן יחד עם למת פאטו

$$\limsup\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^{2}\right)\leq\mathbb{E}\left(S_{T}^{2}\right)\leq\liminf\left(\mathbb{E}_{T\wedge n}^{2}\right)$$

ולכן $\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}^{2}\right)\to\mathbb{E}\left(S_{T}^{2}\right)$ כמו שרצינו, כלומר סיימנו. ■

תרגיל (שאלה ממבחן 2016 סמסטר ב' מועד א') תהי (ξ_n) סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שמתפלגים אחיד על $[-1,1]$. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x)\leq\min\{x,1-x\}$ לכל x. יהי $x_0\in[0,1]$, ונגדיר

$$\begin{aligned}X_0&=x_0\\X_{n+1}&=X_n+\xi_{n+1}f(X_n)\end{aligned}$$

1. הראו כי $X_n\to X_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L^1.
2. הוכיחו כי $f(X_\infty)=0$ כמעט תמיד, כלומר $\mathbb{P}\left(X_\infty\in f^{-1}(0)\right)=1$.
3. נניח כי $f(x)>0$ לכל $x\in(0,1)$. מצאו את ההתפלגות של X_∞.

פתרון

1. ראשית נראה כי X_n מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$. מתקיים

$$\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\mid\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(\xi_{n+1}f(X_n)\mid\mathcal{F}_n)=f(X_n)\,\mathbb{E}(\xi_n\mid\mathcal{F}_n)=0$$

כעת, X_n גם חסום בגלל התכונה על f, ולכן הא מתכנס כמעט תמיד ובנורמת L^1 אל X_∞.

2. מתקיים $X_{n+1}-X_n\to0$ כמעט תמיד ולכן $\xi_{n+1}f(X_n)\to0$ כמעט תמיד. כמו כן, f רציפה $f(X_n)\to f(X_\infty)$ כמעט תמיד. לכן, מספיק להראות כי $\mathbb{P}(\exists\lim\xi_n)=0$ (היה מספיק אפילו להראות שהוא מתכנס לאפס בסיכוי 0). זה כמובן נובע מלמת בורל קנטלי השנייה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\limsup\left\{\xi_n\geq\frac{1}{2}\right\}\right)&=1\\\mathbb{P}\left(\limsup\left\{\xi_n\leq-\frac{1}{2}\right\}\right)&=1\end{aligned}$$

ולכן לא יכולה להיות התכנסות (כמעט אף פעם).

3. מההנחה על f ומסעיף ב' נקבל $\mathbb{P}(X_\infty\in\{0,1\})=1$. לכן $X_\infty\sim\mathrm{Ber}(p)$ עבור p מסויים, שכל שנותר והא לחשבו. כעת

$$x_0=\mathbb{E}X_0=\lim_n\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}X_\infty=\mathbb{P}(X_\infty=1)=p$$

וסיימנו - $X_\infty\sim\mathrm{Ber}(x_0)$.