<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

ארזים ©

13 במרץ 2017

1 חזרה

1.1 מרחב הסתברות בדיד

הגדרה 1.1 מרחב הסתברות בדיד הוא זוג $(\Omega,\mathbb{P})$, כאשר Ω קבוצה וכן $\mathbb{P}:P(\Omega)\to[0,1]$ המקיימת:

$$\forall A\subseteq\Omega\ \ \mathbb{P}(A)\geq 0$$
$$\mathbb{P}(\Omega)=1$$
$$A\cap B=\emptyset\Rightarrow\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$$

הגדרה 1.2 משתנה מקרי הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$. מגדירים את התוחלת:

$$\mathbb{E}[X]=\sum\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)=\sum_{x\in\mathbb{R}}x\cdot\mathbb{P}(X(\omega)=x)$$

שונות:

$$\mathrm{Var}X=\mathbb{E}\left[(x-\mathbb{E}[x])^2\right]=\mathbb{E}\left[x^2\right]-\mathbb{E}[x]^2$$

1.1.1 התפלגויות בדידות נפוצות

1. אחידה: $X\sim\mathrm{U}(\{1,\ldots,n\})$, לכל $1\leq k\leq n$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$.
2. בינומית: $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$, לכל $1\leq k\leq n$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
3. ברנולי: $X\sim\mathrm{Ber}(p)$, מתקיים $\mathbb{P}(X=0)=1-p$, $\mathbb{P}(X=1)=p$.
4. גיאומטרית: $X\sim\mathrm{Geom}(p)$, לכל k טבעי מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.
5. פואסונית: $X\sim\mathrm{Poisson}(\lambda)$, לכל k טבעי מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

2 מרחב הסתברות כללי

הגדרה 2.1 מרחב הסתברות הוא שלישייה $(\omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, כאשר $\mathcal{F}\subseteq P(\Omega)$ סיגמא אלגברה, $\mathbb{P}$ מידה, עם האקסיומות הבאות:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega)&=1\\ \forall A\in\mathcal{F}\ \ \mathbb{P}(A)&\geq 0\\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

באקסיומה האחרונה, הקבוצות זרות בזוגות.

הגדרה 2.2 משתנה מקרי ממשי הוא פונקציה מדידה $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$. משתנה מקרי כללי הוא פונציה מדידה $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\Sigma)$ למרחב מידה.

הגדרה 2.3 התוחלת של משתנה מקרי מוגדרת להיות:

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\Omega}X(\omega)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)=\int_{\mathbb{R}}x\,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

נסביר את הסימון בשוויון האחרון: $\mathbb{P}_X$ היא מידה על $\mathbb{R}$, כאשר

$$\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)$$

2.1 תזכורת / חידוש מממשיות

משפט 2.4 (משפט ראדון־ניקודים ־ מקרה פרטי) יהיו μ,ν שתי מידות סופיות על $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ שמקיימות

$$\forall A\subseteq\mathbb{R}\ \ \mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$$

מסמנים את זה $\nu<<\mu$ (קרי ν נשלטת על ידי μ, או ν רציפה בהחלט ביחס למידה μ). אזי קיימת f אינטגרבילית כך שמתקיים $\nu=f\cdot\mu$, כלומר

$$\nu(A)=\int_{A}f\,\mathrm{d}\mu$$

f תיקרא פונקציית הצפיפות של ν לפי μ.

2.2 מידות רציפות

הגדרה 2.5 יהי $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות כאשר $\mathbb{P} << \text{Leb}$. נסמן את פונקציית הצפיפות $f:\mathbb{R}\to[0,1]$. זו פונקציה אינטגרבילית, וכן

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{dLeb}=1$$

יהי X משתנה מקרי. אזי

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{\mathbb{R}} X\left(y\right)f\left(y\right)\,\mathrm{d}y$$

כעת,

$$\mathbb{P}_X\left(A\right)=\int_{X^{-1}(A)} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

f תיקרא PDF (Probability Distribution Function) של $\mathbb{P}$.

2.2.1 התפלגויות רציפות נפוצות

1. אחידה: $X\sim\mathrm{U}\left(\left[a,b\right]\right)$, $f\left(x\right)=\frac{1_{[a,b]}}{b-a}$. נחשב את השונות:

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(X\right)^2=\int_{-1}^{1}x^2f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

2. אקספוננציאלית: $X\sim\mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$, $f\left(x\right)=c_\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}$. נחשב את c_λ:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=c_\lambda\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{c_\lambda}{\lambda}\Rightarrow c_\lambda=\lambda$$
$$f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,\infty)}$$

נגדיר $Y=\lceil X\rceil$. נחשב את ההתפלגות של Y.

$$\mathbb{P}\left(Y=k\right)=\mathbb{P}\left(k-1<X\le k\right)=\int_{k-1}^{k}\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-e^{-\lambda x}\mid_{k-1}^{k}=e^{-\lambda(k-1)}-e^{-\lambda k}=$$
$$=e^{-\lambda(k-1)}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

כלומר $Y\sim\mathrm{Geom}\left(1-e^{-\lambda}\right)$.

3. נורמלית: $X\sim\mathrm{N}\left(\mu,\sigma\right)$, $f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. זו התפלגות הפעמון המוכרת (μ שולט, באיזשהו מובן, ברוחב הפעמון).