הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

24 במאי 2017

1 סכומים של משתנים מקריים בלתי תלויים

משפט 1.1 (שראינו כבר) יהיו (X_n) בלתי תלויים בעלי תוחלת אפס ושונות סופית.

1. אם $\sum \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty$ אזי $\mathbb{P}\left(\exists \sum X_n\right) = 1$.
2. אם (X_n) חסומים, כלומר קיים $K < \infty$ עבורו $\mathbb{P}\left(|X_n| < K\right) = 1$, אזי אם $\mathbb{P}\left(\exists \sum X_n\right) = 1$, אזי $\sum \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty$.

משפט 1.2 יהיו (X_n) בלתי תלויים ובעלי שונות סופית. נניח שהמשתנים חסומים, כלומר שוב קיים $K < \infty$ עבורו $\mathbb{P}\left(|X_n| < K\right) = 1$. אזי אם $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד, אז $\sum \mathbb{E}X_n < \infty$ וגם $\sum \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty$.

הוכחה: ניסיון ראשון: נגדיר

$$Y_n = X_n - \mathbb{E}X_n$$

אזי גם אלה משתנים חסומים, ובעלי תוחלת אפס, וכן $\mathrm{Var}\left(Y_n\right) = \mathrm{Var}\left(X_n\right)$. כעת, $\sum Y_n$ מתכנס כמעט תמיד אם ורק אם $\sum \mathbb{E}X_n$ מתכנס, כי ידוע כבר שהטור $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד.

במקום זאת, נעזר בטריק הבא. יהיו (X_n') סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים בעצמם וגם בסדרה (X_n), ובעלי אותה התפלגות כמו (X_n). כעת נגדיר $Z_n = X_n - X_n'$. אזי Z_n בלתי תלויים, בעלי תוחלת אפס, חסומים, וכן

$$\mathrm{Var}\left(Z_n\right) = 2\mathrm{Var}\left(X_n\right)$$

מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sum X_n < \infty, \sum X_n' < \infty\right) = 1$$

ולכן נובע כי

$$\mathbb{P}\left(\sum Z_n < \infty\right) = 1$$

וכעת נפעיל את המשפט הקודם, ונקבל

$$\sum \mathrm{Var}\left(Z_n\right) = 2\sum \mathrm{Var}\left(X_n\right) < \infty$$

מהסעיף השני. מכאן נקבל גם מהסעיף הראשון של המשפט הקודם שהטור $\sum Y_n$ מתכנס כמעט תמיד - וראינו כבר שזה שקול להתכנסות $\sum \mathbb{E}X_n$. ■

משפט 1.3 (משפט שלושת הסדרות של קולמוגורוב) תהי (X_n) סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד <u>אם ורק אם</u> קיים (ואז לכל) $0 < K < \infty$ כך שמתקיים:

1. $\sum \mathbb{P}\left(|X_n| > K\right) < \infty$.
2. $\sum \mathbb{E}X_n^K$ מכתנס.
3. $\sum \mathrm{Var}\left(X_n^K\right)$ מתכנס.

כאשר

$$X_n^K := \begin{cases} X_n & |X_n| \le K \\ 0 & |X_n| > K \end{cases}$$

הוכחה: ראשית נניח שהטור $\sum X_n$ מתכנס. נבחר $0 < K < \infty$ ונוכיח את התנאים.

1. מלמת בורל קנטלי השניי, היות והמאורע $\{|X_n| > K\}$ קורה רק למספר סופי של ערכי n, נקבל $\sum \mathbb{P}\left(|X_n| > K\right) < \infty$ - אם היה מתבדר, מאי תלות של המאורעות היינו מקבלים שהמאורעות חייבים לקרות אינסוף פעמים בהסתברות 1.
2. מלמת בורל קנטלי הראשונה (או פשוט מכך שהטור $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד) ומהסעיף הראשון, נובע כי כמעט תמיד $X_n^K = X_n$ פרט למספר סופי של פעמים. לכן $\sum X_n^K$ מתכנס. מכאן נובעים גם סעיף זה וגם הבא מהמשפט הקודם.

כעת, בכיוון השני, נתון לנו $0 < K < \infty$ עבורו התנאים $1, 2, 3$ מתקיימים. ראשית, נוכיח שהטור $\sum X_n^K$ מתכנס כמעט תמיד. אכן, נגדיר

$$Y_n = X_n^K - \mathbb{E}\left(X_n^K\right)$$

ואז אלה בלתי תלויים, חסומים, בעלי תוחלת אפס וסכום שונויות סופי, ולכן $\sum Y_n$ מתכנס תמיד. טור התוחלות $\sum \mathbb{E}X_n^K$ מתכנס, ומכאן נקבל כי $\sum X_n^K$ מתכנס כמעט תמיד.

כעת, מלמת בורל קנטלי הראשונה, $X_n^K = X_n$ פרט למספר סופי של ערכי n כמעט תמיד. לכן גם $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד. ■

דוגמא לכך שאם $\sum X_n$ מתכנס כמעט תמיד , לאו דווקא $\sum \mathbb{E}X_n$ מתכנס. נגדיר

$$X_n \sim \begin{cases} 0 & 1-\frac{1}{n^2} \\ n^2 & \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

מלמת בורל קנטלי השנייה, רק מספר סופי של משתנים יקבלו ערך שאינו אפס, ולכן הטור אכן מתכנס, אבל $\mathbb{E}X_n = 1$, ולכן הסכום שלהן מתבדר.

כעת, אנחנו מכוונים אל החוק החזק של המספרים הגדולים, שננסח כעת.

משפט 1.4 (החוק החזק) יהיו (X_n) בלתי תלויים ושווי התפלגות. נניח כי $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. אזי $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1$ כמעט תמיד.

לשם זה נצטרך לעבוד קצת, ולתת כל מיני למות מחדו"א.

למה 1.5 (למת צ'זארו) תהי (b_n) סדרת מספרים חיוביים העולה לאינסוף. תהי (v_n) סדרה שמתכנסת אל v_∞. אזי

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-b_{k-1}\right)v_k \to v_\infty$$

ההוכחה נשארת כתרגיל (קל).

למה 1.6 (למת קרונקר) תהי (b_n) סדרת מספרים חיוביים העולה לאינסוף. תהי (x_n) סדרת ממשיים. נגדיר

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

כעת,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{b_n} < \infty \Rightarrow \frac{s_n}{b_n} \to 0$$

הוכחה: נגדיר

$$u_0 = 0$$
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{b_k}$$

מהנתון $u_n \to u_\infty$ מתכנס. כמו כן, $u_n - u_{n-1} = \frac{x_n}{b_n}$. אזי

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k-u_{k-1}\right)b_k = b_n u_n - \sum_{k=1}^{n}\left(b_k-b_{k-1}\right)u_{k-1}$$

כעת נחלק ונשתמש בלמת צ'זארו ונקבל

$$\frac{s_n}{b_n} = u_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})\,u_k \to u_\infty - u_\infty = 0$$

■

משפט 1.7 (החוק החזק בהנחה על השונויות) תהי (W_n) סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים, עם $\mathbb{E}W_n = 0$, וכן

$$\sum \frac{\mathrm{Var}(W_n)}{n^2} < \infty$$

אזי $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k \to 0$ כמעט תמיד.

הוכחה: מלמת קרונקר, מספיק להראות

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{W_k}{k}\right) = 1$$

כעת, נשים לב כי

$$\mathrm{Var}\left(\frac{W_k}{k}\right) = \frac{\mathrm{Var}(W_k)}{k^2}$$

ולכן מה שרצינו נובע - טור השונויות של משתנים מקריים בלתי תלויים מתכנס, ולכן גם הטור שלהם מתכנס (כמעט תמיד). ■

הערה 1.8 (W_n)לאו דווקא שווי התפלגות.

דוגמא להדיקות של התנאי - ניקח $W_n \sim N(0, n)$. אזי $\sum \frac{\mathrm{Var}(W_n)}{n^2} = \infty$ וכן $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k \sim N\left(0, \frac{n+1}{2n}\right)$. אזי

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k \to 0\right) = 0$$

כדי להתקדם לחוק החזק הקלאסי, נעזר בעוד למה.

למה 1.9 (למת הקיטום של קולמוגורוב) תהי (X_n) סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. כמו כן, נניח כי $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. נגדיר

$$Y_n := \begin{cases} X_n & |X_n| \le n \\ 0 & |X_n| > n \end{cases}$$

אזי הבאים מתקיימים:

1.

$$\mathbb{E}Y_n \to \mathbb{E}X_1$$

2. $Y_n = X_n$ פרט למספר סופי של פעמים כמעט תמיד.
3. $\sum \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.

הוכחה: יהי X משתנה מקרי בעל ההתפלגות של X_1.

1.

$$\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{|X_n| \le n}\right) = \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{|X| \le n}\right)$$

המשתנה בתוך התוחלת באגף הימני שואף כמעט תמיד אל X, ונשלט על ידי $|X|$, ולכן מהתכנסות נשלטת נקבל

$$\mathbb{E}Y_n \to \mathbb{E}X$$

2. מבורל קנטלי, יש להראות כי

$$\sum \mathbb{P}\left(X_n \neq Y_n\right) < \infty$$

והרי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(X_n \neq Y_n\right) = \mathbb{P}\left(|X_n| > n\right) = \mathbb{P}\left(|X| > n\right)$$

וכעת,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| > n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{|X|>n}\right) &= \\ = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{|X|>n}\right) &= \\ = \mathbb{E}\left(\lceil |X| \rceil - 1\right) \le \mathbb{E}\left|X\right| < \infty\end{aligned}$$

.3

$$\sum \frac{\mathrm{Var}\left(Y_n\right)}{n^2} \leq \sum \frac{\mathbb{E}\left(Y_n^2\right)}{n^2} = \sum \frac{\mathbb{E}\left(X_n^2 \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}\right)}{n^2} = $$
$$= \sum \frac{\mathbb{E}\left(X^2 \mathbb{1}_{|X| \leq n}\right)}{n^2} =$$
$$= \mathbb{E}\left(X^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{|X| \leq n}}{n^2}\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(X^2 \underbrace{\sum_{n=\max(1,\lceil |X| \rceil)}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\leq \frac{2}{\max(1,|X|)}}\right) \leq 2\mathbb{E}|X| < \infty$$

■

הוכחה: (של החוק החזק בלי ההנחה) יהיו (Y_n) כמו בלמת הקיטום. אלה בלתי תלויים וכן

$$\sum \frac{\mathrm{Var}\left(Y_n\right)}{n^2} < \infty$$

נגדיר $W_n = Y_n - \mathbb{E}Y_n$, ומהחוק החזק תחת הנחת שונות נקבל

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} W_k \to 0$$

כמעט תמיד. כעת,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} W_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_k$$

מלמת צ'זארו ומלמת הקיטום, הטור הימני מתכנס אל $\mathbb{E}X_1$. לכן

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k \to \mathbb{E}X_1$$

כמעט תמיד. מכאן גם

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}X_1$$

שכן $X_k = Y_k$ לכל k פרט למספר סופי כמעט תמיד. ■

2 בחזרה למרטינגלים חסומים בנורמת L^2

משפט 2.1 (פירוק דוב) נתון תהליך מותאם (X_n) עם $\mathbb{E}|X_n| < \infty$. אז קיימים תהליכים M, A כך שניתן לכתוב

$$X_n = X_0 + M_n + A_n$$

כאשר (M_n) מרטינגל עם $M_0 = 0$, (A_n) תהליך צפוי עם $A_0 = 0$ - כלומר $A_0 = 0$ וכן A_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_{n-1}$ לכל $n \geq 1$.
כמו כן, פירוק זה הוא יחידה, במובן שאם A', M' פירוק נוסף שכזה אזי לכל n מתקיים

$$\mathbb{P}(A_n = A'_n) = \mathbb{P}(M_n = M'_n) = 1$$

בנוסף, אם (X_n) תת מרטינגל, אזי A עולה, במובן שלכל n מתקיים

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \geq A_n) = 1$$

הוכחה: נניח שנתון פירוק כזה. אזי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \underbrace{\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{=0} + \mathbb{E}(A_n - A_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= A_n - A_{n-1}\end{aligned}$$

השתמשנו בכך שהתהליך M הוא מרטינגל, והתהליך A הוא צפוי. אם כן,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

וקיבלנו איפיון של A לפי X. כך נקבל גם איפיון של M_n:

$$M_n = X_n - X_0 - A_n$$

כל שני פירוקים מקיימים את התנאים הללו, ולכן נובע שהם שווים כמעט בכל מקום (לא שווים ממש, כי עברנו דרך תוחלת מותנה, שמוגדרת רק עד כדי "כמעט בכל מקום").
נותר לבדוק שההגדרות הללו של A, M מקיימות את התנאים. A אכן צפוי, מהגדרתו, $A_0 = 0$. החישוב הקודם מראה גם כי M מרטינגל.
כעת, נניח כי X תת מרטינגל. כעת, נובע מהחישוב שראינו:

$$A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq 0$$

■

2.1 השתנות ריבועית של מרטינגל

הגדרה 2.2 יהי M מרטינגל חסום בנורמת L^2. אזי $M^2 = \left(M_n^2\right)_n$ תת מרטינגל. נניח גם כי $M_0 = 0$. מפירוק דוב, קיים A צפוי ולא יורד כך שהתהליך $M^2 - A$ הוא מרטינגל עם תוחלת אפס. A הזה נקרא ההשתנות הריבועית של M, ומסומן $\langle M\rangle$.

מההגדרה, $\mathbb{E}M_n^2 = \mathbb{E}A_n$, ולכן אם נסמן

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$$

שקיים כמעט תמיד אבל אולי אינסופי, אזי M חסום בנורמת L^2 אם ורק אם $\mathbb{E}A_\infty < \infty$. כמו כן,

$$A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}\left(M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\left(M_n - M_{n-1}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

משפט 2.3 יהי M מרטינגל חסום בנורמת L^2 עם $M_0 = 0$.

1. כמעט לכל ω שבה $A_\infty(\omega) < \infty$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\omega)$$

קיים וסופי.

2. אם ההפרשים של M חסומים, כלומר קיים K עבורו

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - M_{n-1}\right| \le K\right) = 1$$

אזי כמעט לכל ω שבו $\lim M_n(\omega)$ קיים וסופי מתקיים גם $A_\infty(\omega) < \infty$.

הערה 2.4 אם (X_k) בלתי תלויים ונגדיר $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ נקבל חזרה את המשפט על התכנסות של טור של בלתי־תלויים.

ההוכחה דומה למקרה של בלתי־תלויים.