הסתברות למתמטיקאים

ⓒ ארזים

10 במאי 2017

1 תורת המרטינגלים

בשיעור האחרון הגדרנו מרטינגלים, תת מרטינגלים ועל מרטינגלים. היום נמשיך לפתח את המושגים ולהבין אותם.

1.1 תהליך צפוי

הגדרה 1.1 תהליך $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ (כאן $n \geq 1$) נקרא צפוי אם C_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_{n-1}$ לכל n. עבור תהליך $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ נגדיר

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=1}^{n} C_k \left(X_k - X_{k-1}\right) \\ Y_0 &= 0 \end{aligned}$$

פירוש אינטואיטיבי: X_n הוא ערך של מניה ביום n. C_n הוא כמות האחזקה שלנו במניה ביום n. Y_n הוא כמות הרווח או ההפסד המצטבר עד יום n.
נסמן $Y = C \cdot X$ (טרנספורם המרטינגל של X על ידי C).

הערה 1.2 ישנה גם גרסה של $C \cdot X$ כאשר X בזמן רציף, כלומר $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ והיא

$$Y_s = \int_0^s C_t \, \mathrm{d}X_t$$

וזהו אינטגרל סטוכסטי (אינטגרל איטו).

כעת, נראה שבמובן הנכון, אי אפשר לנצח את השיטה.

משפט 1.3
1. יהי X על (באופן אנלוגי תת) מרטינגל ויהי C תהליך צפוי. נניח כי $C_n \left(X_n - X_{n-1}\right)$ אינטגרבילי לכל $n \geq 1$. אזי, אם $C_n \geq 0$ לכל n אזי $C \cdot X$ על (תת) מרטינגל.
2. יהי X מרטינגל ויהי C תהליך צפוי. נניח כי לכל $C_n \left(X_n - X_{n-1}\right)$ אינטגרבילי לכל $n \geq 1$. אזי $C \cdot X$ מרטינגל.

הוכחה: נסמן $Y = C \cdot X$. ברור שזהו תהליך מותאם. מהנתון, $\mathbb{E}\left|Y_n\right| < \infty$ לכל n. כעת, נבדוק את התנאי:

$$\mathbb{E}\left(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(C_n\left(X_n - X_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

כעת, C_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_{n-1}$ כי C צפוי. לכן

$$\mathbb{E}\left(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(C_n\left(X_n - X_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = C_n \mathbb{E}\left(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

אם X על מרטינגל אזי הגורם הימני שלילי כמעט תמיד, ואז אם $C_n \geq 0$ אזי קיבלנו $\mathbb{E}\left(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \leq 0$ כמעט תמיד כמו שרצינו. אם X מרטינגל נקבל שהגורף הימני הוא 0, ולכן גם $\mathbb{E}\left(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$. לכן הוכחנו את שני הסעיפים. ■

1.2 זמני עצירה

הערה 1.4 מעתה נוסיף לפילטרציה שלנו $\left\{\mathcal{F}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ גם את $\mathcal{F}_\infty$ על ידי

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$$

הגדרה 1.5 זמן עצירה הוא משתנה מקרי T המקבל ערכים מתוך $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ המקיים שלכל $n \geq 0$ מתקיים

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

או באופן שקול, לכל $n \geq 0$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

השקילות נובעת כי

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$$
$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}$$

דוגמא יהיו $\left(D_n\right)_{n=1}^{\infty}$ בלתי תלויים שווי התפלגות עם $\mathbb{P}\left(D_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(D_n = -1\right) = \frac{1}{2}$. נגדיר

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$$

כאשר $X_0 = 0$. ניקח

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(D_0, \dots, D_n\right)$$
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

זמני עצירה אפשריים:

- $T = n_0$ עבור n_0 קבוע.
- $T = \inf\{n \mid X_n = 1\}$. כמובן המאורע $\{T = k\}$ אומר שלכל $m < k$ מתקיים $X_n < 1$, וכן $X_k = 1$ - ומתוך סדרת ההפרשים $D_1, \dots, D_n$ אפשר לדעת האם זה מתקיים. לכן $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k$. כרגיל, $\inf\{\emptyset\} = \infty$. נבחין כי $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$.

דברים שאינם זמני עצירה:

- $T = \inf\{n \mid D_{n+1} = -1\}$.
- T הוא אותו k שעבורו

$$X_k = \max_{0 \le j \le 100} X_j$$

הגדרה 1.6 יהי X על מרטינגל, ויהי T זמן עצירה. נגדיר את X שנעצר בזמן T על ידי

$$X^T = \left(X_n^T\right)_{n=0}^{\infty}$$

כאשר

$$X_n^T = X_{\min(n,T)} \coloneqq X_{n \wedge T}$$

משפט 1.7 X^T גם הוא על מרטינגל. בפרט,

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} \le \mathbb{E}X_0$$

הוכחה: נגדיר $C_n = \mathbb{1}_{n \le T}$. נטען כי זה תהליך צפוי - כלומר צריך לבדוק כי

$$\{n \le T\} \in \mathcal{F}_{n-1}$$

זה נכון כי

$$\{n \le T\} = \{n < T\}^c = \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T = k\}\right)^c \in \mathcal{F}_{n-1}$$

כעת נבדוק כי $X^T = C \cdot X$. אכן,

$$\begin{aligned}(C \cdot X)_n &= \sum_{k=1}^{n} C_k (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k \le T} (X_k - X_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\min(n,T)} X_k - X_{k-1} = X_{T \wedge n} = X_n^T\end{aligned}$$

ואז המשפט נובע מהמשפט הקודם על $C \cdot X$. ■

הערה 1.8 המשפט נכון לתת מרטינגל או למרטינגל עם ההגדרה האנלוגית. במקרה של מרטינגל נובע כי

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} = \mathbb{E}X_0$$

בדוגמה של ההילוך המקרי, כאשר $T = \inf\{n \mid X_n = 1\}$ ידוע (ונוכיח בהמשך) כי $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. כעת, נבחין בעובדה מפתיעה. לכל n מתקיים $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = 0$ מהמשפט, אבל $\mathbb{E}X_T = 1$. נזכר כי

$$X_T = \lim_{n \to \infty} X_{n \wedge T}$$

ועל כן בפרט אין כאן התכנסות נשלטת או מונוטונית.

נבחן מספר תנאים המספיקים לכך שמתקיים $\mathbb{E}X_T \le \mathbb{E}X_0$ עבור על מרטינגל.

משפט 1.9 (משפט העצירה האפשרית של דוב) יהי X על מרטינגל ויהי T זמן עצירה. אזי X_T אינטגרבילי ומקיים $\mathbb{E}X_T \le \mathbb{E}(X_0)$ במקרים הבאים:

1. T חסום ־ קיים $N < \infty$ עבורו $\mathbb{P}(T \le N) = 1$.
2. X חסום ־ קיים $K < \infty$ עבורו לכל n מתקיים $\mathbb{P}(|X_n| \le K) = 1$, וכן $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.
3. ההפרשים של X חסומים ־ קיים $K < \infty$ עבורו לכל n מתקיים $\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| \le K) = 1$ וכן T אינטגרבילי.

הוכחה: בכל המקרים, $T < \infty$ כמעט תמיד. לכן

$$X_T = \lim_{n \to \infty} X_{n \wedge T}$$

ומהמשפט הקודם $\mathbb{E}X_{n \wedge T} \le \mathbb{E}X_0$.

1. $X_T = X_{N \wedge T}$, ולכן סיימנו.
2. נובע ממשפט ההתכנסות החסומה (או הנשלטת).

3. נשתמש בהתכנסות נשלטת:

$$|X_{n\wedge T}|=\left|\sum_{k=1}^{n\wedge T}X_k-X_{k-1}\right|\leq\sum_{k=1}^{n\wedge T}|X_k-X_{k-1}|\leq K\left(n\wedge T\right)\leq KT$$

המשתנה KT אינטגרבילי, ולכן סיימנו.

■

יש גם מקרה רביעי ־ אם העל מרטינגל אי שלילי וזמן עציה סופי כמעט תמיד. זו מסקנה מיידית מלמת פאטו.

דוגמא ננתח עוד את דוגמת ההילוך המקרי. נמצא את ההתפלגות של $T=\inf\left\{n\mid X_n=1\right\}$. כיוון שהמשתנה X_n הוא סכום של אותם D_n שהם הטלות מטבע, והם בלתי תלויים, טבעי להסתכל על

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\theta X_n}\right)=\mathbb{E}\left(e^{\theta\left(D_1+\cdots+D_n\right)}\right)=\mathbb{E}\left(e^{\theta D_1}\cdots e^{\theta D_n}\right)=\mathbb{E}\left(e^{\theta D_1}\right)^n=\\=\left(\frac{1}{2}e^{\theta}+\frac{1}{2}e^{-\theta}\right)^n=\cosh^n\theta\end{aligned}$$

נגדיר כעת

$$M_n=\frac{e^{\theta X_n}}{\cosh^n\theta}=\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\theta D_k}}{\cosh\theta}$$

וזהו מרטינגל אי שלילי ־ אכן, M מותאם, M_n אינטגרבילי, וכן

$$\mathbb{E}\left(M_n\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)=M_{n-1}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta D_n}}{\cosh\theta}\mid\mathcal{F}_{n-1}\right)=M_n\mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta D_n}}{\cosh\theta}\right)=M_n$$

נתבונן במרטינגל העצור $M^T=\left(M_{n\wedge T}\right)$. מהמשפט,

$$\mathbb{E}\left(M_{n\wedge T}\right)=\mathbb{E}M_0=1$$

לכל $n\geq 0$. מצד שני,

$$\mathbb{E}\left(M_{n\wedge T}\right)=\mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{\left(\cosh\theta\right)^{n\wedge T}}\right)$$

נקבע $\theta>0$. לא ברור אם $\mathbb{P}\left(T<\infty\right)=1$ (נוכיח שכן). נבחין שלכל n מתקיים

$$M_{n\wedge t}=\frac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{\left(\cosh\theta\right)^{n\wedge T}}\leq\frac{e^{\theta}}{\left(\cosh\theta\right)^{n\wedge T}}\leq e^{\theta}$$

נגדיר, באופן מלאכותי, $M_\infty = 0$. כעת, כמעט תמיד,

$$M_{n\wedge T} \xrightarrow{n\to\infty} M_T$$

מהתכנסות חסומה, $\mathbb{E}M_{n\wedge T} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}M_T$, ולכן

$$\mathbb{E}M_T = 1$$

כאשר

$$M_T = \begin{cases} M_T & T<\infty \\ 0 & T=\infty \end{cases}$$

כעת,

$$M_T = \frac{e^\theta}{(\cosh\theta)^T} \le e^\theta$$

ושוויון זה נכון גם עבור $T=\infty$. ניקח $\theta\downarrow 0$ ונבחין כי

$$\lim_{\theta\downarrow 0} M_T = \begin{cases} 1 & T<\infty \\ 0 & T=\infty \end{cases}$$

לכן, היות וראינו $\mathbb{E}M_T = 1$, נקבל $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T<\infty}\right) = 1$, כלומר $\mathbb{P}\left(T<\infty\right)=1$.
כעת, נסיק עוד מידה מהשוויון $\mathbb{E}M_T = 1$. השוויון אומר שלכל $\theta > 0$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\underbrace{\frac{1}{(\cosh\theta)^T}}_{\alpha^T = e^{T\ln\alpha}}\right) = e^{-\theta} = \frac{1}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$$

כאשר $\alpha = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$. כלומר, לכל $0<\alpha<1$ קיבלנו כי

$$\mathbb{E}\left(\alpha^T\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(T=k\right)\alpha^k = \frac{1}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{m}\alpha^{2m-1}$$

כאשר עבור $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\binom{\theta}{n} = \frac{\theta\left(\theta-1\right)\cdots\left(\theta-n+1\right)}{n!}$$

המקדם הבינומי הממשי. נסיק כי עבור $m\ge 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(T=2m-1\right) = (-1)^{m+1}\binom{\frac{1}{2}}{m}$$

$$\mathbb{P}\left(T=2m\right) = 0$$

2 משפט התכנסות המרטינגל

משפט 2.1 (משפט התכנסות המרטינגל) יהי X על מרטינגל חסום בנורמת L^1 - כלומר

$$\sup_n \mathbb{E}\left|X_n\right| < \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim_{n\to\infty} X_n < \infty\right) = 1$$

דוגמא נחזור להילוך המקרי X. זה בעצמו מרטינגל, אבל X לא חסום בנורמת L^1. נזכר כי $T = \inf\left\{n \mid X_n = 1\right\}$. גם $X_{n\wedge T}$ הוא מרטינגל. ידוע לנו כי $\mathbb{E}\left(X_{n\wedge T}\right) = 0$, אבל $X_{n\wedge T} \leq 1$ כמעט תמיד. מכאן,

$$\mathbb{E}\left|X_{n\wedge T}\right| \leq 2$$

ועל כן $X_{n\wedge T}$ חסום בנורמת L^1, ולכן מתכנס כמעט תמיד. כיוון שהוא מקבל ערכים שלמים בלבד, נובע שהוא קבוע החל ממקום מסויים, כמעט תמיד. כלומר, $\mathbb{P}\left(T < \infty\right) = 1$.