<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

© ארזים

3 במאי 2017

1 תוחלת מותנה

הגדרה 1.1 לכל משתנה מקרי X אינטגרבילית ותת סיגמא אלגברה $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ קיים משתנה מקרי $Y := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ המקיים:

1. Y מדיד לפי $\mathcal{G}$.
2. $\mathbb{E}|Y| < \infty$.
3. לכל $A \in \mathcal{G}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$$

כל שני משתנים המקיימים זאת שווים כמעט תמיד, וכל אחד מהם נקרא גרסה של התוחלת המותנה. נסמן

$$\mathbb{E}(X \mid W) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(W))$$

תרגיל אם תכונה 3 מתקיימת עבור מאורעות A שמהווים מערכת π היוצרת את $\mathcal{G}$ אז היא מתקיימת לכל $A \in \mathcal{G}$.

תכונות נניח כי X אינטגרבילי, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

1. (תוחלת שלמה) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$.
2. אם X מדיד ביחס לאותה $\mathcal{G}$, אזי $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$ כמעט תמיד.
3. (לינאריות) יהיו X_1, X_2 אינטגרביליים, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. אזי

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2 \mid \mathcal{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$$

כמעט תמיד.

4. (חיוביות) אם $X \geq 0$ אזי $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \geq 0$ כמעט תמיד. בפרט, אם $X_1 \geq X_2$ אינטגרביליים, אזי $\mathbb{E}\left(X_1 \mid \mathcal{G}\right) \geq \mathbb{E}\left(X_2 \mid \mathcal{G}\right)$ כמעט תמיד. **הוכחה:** אם לא מתקיים $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \geq 0$ כמעט תמיד, אז קיים n שלם עבורו

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) < -\frac{1}{n}\right) > 0$$

זאת כיוון שהמאורע $\{\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) < 0\}$ הוא האיחוד הבא:

$$\bigcup_n \left\{\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) < -\frac{1}{n}\right\}$$

וזהו איחוד עולה. מכאן,

$$\begin{aligned} 0 > -\frac{1}{n}\mathbb{P}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) < -\frac{1}{n}\right) > \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)\mathbb{1}_{\left\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<-\frac{1}{n}\right\}}\right) = \\ = \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\left\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<-\frac{1}{n}\right\}}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

וקיבלנו סתירה. ■

5. (התכנסות מונוטונית) אם $0 < X_n \uparrow X$ כמעט תמיד עם $\mathbb{E}\left|X_n\right| < \infty$, $\mathbb{E}\left|X\right| < \infty$, אזי $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right) \uparrow \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ כמעט תמיד. **הוכחה:** $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)$ זו סדרה עולה, מהתכונה הקודמת. נגדיר $Y = \limsup \mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)$. ברור שגם Y מדיד לפי $\mathcal{G}$, וכן $Y \geq 0$ כמעט תמיד. כעת, לכל $A \in \mathcal{G}$, מהתכנסות מונוטונית רגילה מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\limsup \mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)\mathbb{1}_A\right) = \lim \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)\mathbb{1}_A\right) = \\ = \lim \mathbb{E}\left(X_n\mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\lim\left(X_n\right)\mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_A\right) \end{aligned}$$

על ידי הצבת $A = \Omega$ נקבל את התכונה השנייה בהגדרה, וסיימנו. ■

6. (פאטו מותנה) אם $X_n \geq 0$ אינטגרביליים, אזי

$$\mathbb{E}\left(\liminf\left(X_n\right) \mid \mathcal{G}\right) \leq \liminf \mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right)$$

כמעט תמיד.

7. (התכנסות נשלטת מותנה) אם $\left|X_n\right| \leq Y$ עם Y אינטגרבילי, $X_n \to X$ כמעט תמיד. אזי $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{G}\right) \to \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ כמעט תמיד.

8. (אי שוויון ינסן מותנה) אם $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קמורה, עם $\mathbb{E}\left|C\left(X\right)\right| < \infty$ אזי

$$\mathbb{E}\left(C\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right) \geq C\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right)$$

כמעט תמיד (אפשר לנסח גם עבור $C : I \to \mathbb{R}$ קמורה, I קטע). **הוכחה:** ניתן למצוא סדרת מספרים a_n, b_n כך שמתקיים

$$C\left(x\right) = \sup_n \left(a_n x + b_n\right)$$

לכל x. בפרט, לכל n מתקיים $C\left(x\right) \geq a_n x + b_n$ ולכן גם

$$\mathbb{E}\left(C\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right) \geq a_n \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) + b_n$$

כמעט תמיד. יש רק כמות בת מניה של ערכי n, ולכן

$$\mathbb{E}\left(C\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right) \geq \sup_n \left(a_n \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) + b_n\right)$$

כמעט תמיד. נקבל:

$$\mathbb{E}\left(C\left(X\right) \mid \mathcal{G}\right) \geq \sup_n \left(a_n \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) + b_n\right) = C\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right)$$

■

מסקנה 1.2 לכל $p > 1$ מתקיים

$$\left|\left|E\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right|\right|_p \leq \left|\left|X\right|\right|_p$$

9. (נוסחת התוחלת השלמה/תכונת המגדל) נאמר כי $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ סיגמא אלגבראות. אזי

$$\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G} \mid \mathcal{H}\right) := \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mid \mathcal{H}\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{H}\right)$$

כמעט תמיד.

10. (אפשר להוציא מהתוחלת את מה שידוע) נניח כי X אינטגרבילי, וכן Z משתנה מקרי מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{G}$. נניח כי ZX אינטגרבילי. אזי

$$\mathbb{E}\left(ZX \mid \mathcal{G}\right) = Z\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$$

כמעט תמיד. **הוכחה:** התכונה הראשונה של תוחלת מותנה ברורה. נתחיל לבדוק את השלישית. ראשית נוכיח את הטענה עבור $Z = \mathbb{1}_B$, עבור $B \in \mathcal{G}$. אזי

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_B X \mid \mathcal{G}\right) \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_B X \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A\right)$$

לכן $\mathbb{1}_B \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ גרסה של $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$. מלינאריות, הטענה נובעת עבור פונקציות פשוטות, ומהתכנסות מונוטונית נקבל לכל משתנה מקרי אי שלילי. שוב מלינאריות, נקבל את הטענה למשתנה כללי. ■

11. (תוחלת מותנה ואי תלות) כאשר X אינטגרבילי, $\mathcal{G},\mathcal{H}\subseteq\mathcal{F}$ זוג סיגמא אלגבראות, $\sigma\left(\sigma\left(X\right),\mathcal{G}\right)$ בלתי תלויה באותה $\mathcal{H}$, מתקיים

$$\mathbb{E}\left(X\mid\sigma\left(\mathcal{G},\mathcal{H}\right)\right)=\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)$$

כמעט תמיד. מקרה פרטי - אם X בלתי תלוי בסיגמא אלגברה $\mathcal{G}$ אזי $\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)=\mathbb{E}\left(X\right)$ כמעט תמיד. **הוכחה:** התכונות הראשונה והשנייה של תוחלת מותנה ברורות. יש להראות את השלישית, כלומר עבור $A\in\sigma\left(\mathcal{G},\mathcal{H}\right)$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid\sigma\left(\mathcal{G},\mathcal{H}\right)\right)\mathbb{1}_{A}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\mathbb{1}_{A}\right)$$

מהתרגיל שנתנו קודם, מספיק לקחת $A=B\cap C$, כאשר $B\in\mathcal{G}$, $C\in\mathcal{H}$.
כעת,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid\sigma\left(\mathcal{G},\mathcal{H}\right)\right)\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C}\right)=\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C}\right)=\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{B}\right)\mathbb{P}\left(C\right)$$

המעבר האחרון נכון בגלל ההנחה שלנו לגבי אי תלות של $\sigma\left(\sigma\left(X\right),\mathcal{G}\right)$, $\mathcal{H}$.
כעת, מהצד השני,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C}\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\mathbb{1}_{B}\right)\mathbb{P}\left(C\right)=\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{B}\right)\mathbb{P}\left(C\right)$$

וקיבלנו שוויון. ■

דוגמא נאמר כי X,Y ממשיים, וההתפלגות של X,Y בעלת צפיפות $f_{X,Y}:\mathbb{R}^{2}\to[0,\infty)$. נרצה להתנות במשתנה X. אז יש עבור Y צפיפות מותנה:

$$f_{Y|X}:\mathbb{R}^{2}\to[0,\infty)$$

המקיימת

$$f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y}$$

כעת, עבור $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עם $h\left(Y\right)$ אינטגרבילי מתקיים

$$\mathbb{E}\left(h\left(Y\right)\mid X\right)=\int h\left(Y\right)f_{Y|X}\left(y\mid X\right)\,\mathrm{d}y$$

גם כאשר אין צפיפויות, אולי נרצה לדבר על התפלגות מותנה, כלומר, לכל ערך של המשתנה המתנה X, נרצה מידת הסתברות חדשה $\mathbb{P}\left(\cdot\mid X\right)$ על מרחב ההסתברות Ω. באופן פומרלי, רוצים פונקציה

$$P:\Omega\times\mathcal{F}\to[0,1]$$

עם:

1. לכל $\omega \in \Omega$, שנחשוב עליו בתוך הנקודה שנותנים עבור X, $P(\omega, \cdot)$ היא מידת התסברות על Ω.

2. לכל $A \in \mathcal{F}$, $P(\cdot, A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid X)$. לפעמים מסמנים תוחלת של אינדיקטור כהסתברות: $P(\cdot, A) = \mathbb{P}(A \mid X)$.

דוגמא יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים (לאו דווקא ממשיים: $X : \Omega \to S, Y : \Omega \to T$). תהי

$$h : S \times T \to \mathbb{R}$$

עם $\mathbb{E}|h(X,Y)| < \infty$. נגדיר, תוך שימוש בפוביני, פונקציה $\alpha : S \to \mathbb{R}$ על ידי

$$\alpha(x) = \mathbb{E}(h(x,Y))$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}(h(X,Y) \mid X) = \alpha(X)$$

ההוכחה תהיה בתרגיל הבית.

2 מרטינגלים

כעת, נוסיף להנחות המקדימות שלנו <u>פילטרציה</u>, כלומר סדרה עולה של סיגמא אלגבראות $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, כלומר $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$. נחשוב על $\mathcal{F}_n$ בתור המידע שידוע לנו לאחר n צעדים של תהליך.

הגדרה 2.1 <u>מרחב מסונן</u> (filtered space) הוא רביעיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n))$, כאשר $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $(\mathcal{F}_n)$ פילטרציה שלו.

הגדרה 2.2 תהליך סטוכסטי הוא סדרת משתנים מקריים $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. התהליך הוא <u>מותאם</u> (adapted) לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$ אם X_n מדיד לפי $\mathcal{F}_n$ לכל n.

הגדרה 2.3 (מרטינגל) תהליך סטוכסטי $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ הוא <u>מרטינגל</u> (ביחס למרחב מסונן מסויים) אם:

1. התהליך (X_n) מותאם לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$.

2. לכל n מתקיים $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

3. לכל $n \geq 1$ מתקיים כמעט תמיד $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$.

אינטואיציה נחשוב על X_n כמייצג את כמות הכסף שיש בידינו לאחר n משחקי הימורים, כאשר ההחלטה כמה להמר בכל משחק עשויה להיות תלויה בתוצאות המשחקים הקודמים. התנאי השלישי מבטיח שהמשחקים הוגנים.

הגדרה 2.4 אם במקום התנאי השלישי נדרוש $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \geq X_{n-1}$, התהליך נקרא תת־מרטינגל. אם נדרוש $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \leq X_{n-1}$ נקרא על־מרטינגל.

הערה 2.5 כמה תכונות בסיסיות:

1. תהליך שהוא על־מרטינגל וגם תת־מרטינגל הוא מרטינגל.
2. אם $X_0 \in L^1$, אז (X_n) הוא תת־מרטינגל אם ורק אם $(X_n - X_0)$ תת מרטינגל.
3. אם (X_n) תת־מרטינגל אזי $(-X_n)$ הוא על־מרטינגל.
4. אם (X_n) תת מרטינגל, $n > m \geq 0$, אזי $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_m\right) =\geq X_m$.

דוגמאות ושאלות:

1. סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים: יהיו $Z_1, Z_2, \ldots$ בלתי תלויים, עם $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = 0$. נגדיר $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n, X_0 = 0$. נגדיר $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(Z_1, \ldots, Z_n\right)$. נוכיח שהתהליך (X_n) הוא מרטינגל. יש למעשה להראות רק את התכונה השלישית:

$$\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(Z_1 + \cdots + Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\underbrace{Z_1 + \cdots + Z_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}}_{measurable}\right) + \mathbb{E}\left(\underbrace{Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}}_{independent}\right) =$$
$$= Z_1 + \cdots + Z_{n-1} + \mathbb{E}\left(Z_n\right) = X_{n-1}$$

שאלה האם X_n מתכנס כמעט תמיד? לאן?

2. מכפלה של משתנים מקריים בלתי תלויים ואי שליליים: תהי $Z_1, Z_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ואי שליליים. נניח כי $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = 1$ לכל n. נגדיר $X_n = Y_1 \cdots Y_n, X_0 = 1$. נגדיר $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma\left(Z_1, \ldots, Z_n\right)$. נוכיח שהתהליך (X_n) הוא מרטינגל. שוב יש להראות רק את התכונה האחרונה:

$$\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(Z_1 \cdots Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = Z_1 \cdots Z_n \mathbb{E}\left(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = X_{n-1}$$

שאלה האם X_n מתכנס כמעט תמיד? כן. האם התוחלת של הגבול היא 1? לא תמיד.

3. צבירת מידע: יהי Z משתנה מקרי אינטגרבילי, ותהי $(\mathcal{F}_n)$ פילטרציה. נגדיר $X_n = \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{F}_n\right)$. אזי (X_n) הוא מרטינגל. כרגיל, שתי התכונות הראשונות ברורות, ועבור השלישית,

$$\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{F}_n\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = X_{n-1}$$

בעתיד נוכיח כי $X_n \to \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{F}_\infty\right)$, כאשר $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup \mathcal{F}_n\right)$. נרצה לשאול האם זה שווה למשתנה Z, כלומר האם Z מדיד ביחס לאותה $\mathcal{F}_\infty$.