הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

29 במרץ 2017

1 אי תלות

במבוא להסתברות אמרנו ששלושה מאורעות הם בלתי תלויים אם

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1\cap A_2)&=\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\\ \mathbb{P}(A_1\cap A_3)&=\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_3)\\ \mathbb{P}(A_2\cap A_3)&=\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)\\ \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)&=\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)\end{aligned}$$

או לחילופין, לכל בחירה של $F_i\in\{A_i,A_i^c\}$, מתקיים

$$\mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap F_3)=\mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(F_3)$$

1.1 מושגים עדכניים

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 1.1 נאמר כי $\{G_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{F}$ הן בלתי תלויות אם לכל n ולכל $\{i_k\}_{k=1}^n\subseteq I$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n G_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^n\mathbb{P}(G_{i_k})$$

לכל בחירה של $\{G_{i_k}\}_{k=1}^n$, כאשר לכל k, מתקיים $G_{i_k}\in\mathcal{G}_{i_k}$.

הערה 1.2 אפשר גם מספר סופי של סיגמא אלגבראות $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^k\subseteq\mathcal{F}$, למשל על ידי לקיחת שאר הסיגמא אלגבראות טריוויאליות, או על ידי דרישה שיתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right)=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}(G_i)$$

לכל בחירה של $\{G_i\}_{i=1}^k$, כאשר לכל i, מתקיים $G_i\in\mathcal{G}_i$.

מסקנה 1.3 אם $\{G_i\}_{i\in I}$ (אולי כמות סופית) בלתי אלגבראות בלתי תלויות, אזי כל תת קבוצה של סיגמא אלגבראות גם היא בלתי תלויה.

הגדרה 1.4 משתנים מקריים $\{X_i\}_{i\in I}$ הם בלתי תלויים אם $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ בלתי תלויות.

הגדרה 1.5 מאורעות $\{E_i\}_{i\in I}$ הם בלתי תלויים אם $\mathbb{1}_{E_1}, \mathbb{1}_{E_2}, \dots$ בלתי תלויים. כלומר, אם הסיגמא אלגבראות $\{\{\emptyset, E_i, E_i^c, \Omega\}\}_{i\in I}$ בלתי תלויות.

כדי לבדוק אי תלות בפועל, נשתמש בלמה הבאה, ובהכללות שלה.

למה 1.6 תהיינה $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ותהיינה $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ מערכות פאי המקיימות

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{I})$$
$$\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{J})$$

אזי אם $\mathbb{P}(G\cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$ עבור $G\in\mathcal{I}$, $H\in\mathcal{J}$ (במצב זה נאמר כי $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ בלתי תלויות), אזי אותה תוצאה מתקיימת לכל $G\in\mathcal{G}$, $H\in\mathcal{H}$ (כלומר $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ בלתי תלויות).

הוכחה: נקבע $G\in\mathcal{I}$. נגדיר שתי מידות על $\mathcal{H}$:

$$\mu_1(H) = \mathbb{P}(G\cap H)$$
$$\mu_2(H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

וניתן לבדוק שאלה אכן מידות. הן לא מידות הסתברות:

$$\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = \mathbb{P}(G) < \infty$$

כיוון שהמידות הללו מזדעות על $\mathcal{J}$ לפי התנאים, נובע מלמה קודמת שהן מזדהות על $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{H}$.
הראינו כי לכל $G\in\mathcal{I}$ ולכל $H\in\mathcal{H}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(G\cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

כעת, נקבע $H\in\mathcal{H}$ץ נגדיר שתי מידות על $\mathcal{G}$:

$$\mu_3(G) = \mathbb{P}(G\cap H)$$
$$\mu_4(G) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$$

וניתן לבדוק שאלה אכן מידות. הן לא מידות הסתברות:

$$\mu_3(\Omega) = \mu_4(\Omega) = \mathbb{P}(H) < \infty$$

כיוון שהמידות הללו מזדעות על $\mathcal{I}$ לפי התנאים, נובע מלמה קודמת שהן מזדהות על $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{G}$.
הראינו כי לכל $G \in \mathcal{G}$ ולכל $H \in \mathcal{J}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\,\mathbb{P}(H)$$

בסך הכל הוכחנו את מה שרצינו. ■

דוגמא שני משתנים מקריים ממשיים X, Y הם בלתי תלויים אם ורק אם לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\,\mathbb{P}(Y \le y)$$

כדי לבדוק זאת, מספיק להבחים שלכל משתנה מקרי ממשי X, המאורעות

$$\pi(X) = \{\{X \le x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

הם מערכת פאי שיוצרת את $\sigma(X)$ (כי הן תמונות הפוכות של מערכת פאי שיוצרת את הסיגמא אלגברה של $\mathbb{R}$).

ניתן להכליל את הלמה הקודמת ליותר מזוג מערכות פאי, אבל צריך להוסיף תנאי.

למה 1.7 אם $\{\mathcal{I}_i\}_{i=1}^n$ מערכות פאי, כאשר מתקיים $\Omega \in \mathcal{I}_i$ לכל i, וכן

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(I_i)$$

לכל בחירה של $\{I_i\}_{i=1}^n$, כאשר לכל i, $I_i \in \mathcal{I}_i$, אזי $\{\sigma(\mathcal{I}_i)\}_{i=1}^n$ בלתי תלויות.
בפרט, $\{X_i\}_{i=1}^n$ משתנים מקריים ממשיים הם בלתי תלויים אם ורק אם

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \le x_i)$$

לכל בחירה של $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$.

למשל, עבור שלושה מאורעות, נוכל לראות שהם בלתי תלויים על ידי לקיחת המאורעות

$$\left\{\mathbb{1}_{E_i} \ge -\frac{1}{2}\right\} = \Omega, \left\{\mathbb{1}_{E_i} \ge \frac{1}{2}\right\} = E_i$$

וכדומה.

משפט 1.8 (למת בורל קנטלי השנייה). יהיו $\{E_i\}_i$ סדרת מאורעות בלתי תלויים. אם

$$\sum_i \mathbb{P}\left(E_i\right) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\limsup E_i\right) = 1$$

הוכחה: נחשב:

$$\mathbb{P}\left(\limsup E_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_n \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_n \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right)\right)$$

כעת, נשים לב שמאי תלות מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right) = \lim_{r \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{r} E_k^c\right) = \lim_{r \to \infty} \prod_{k=n}^{r} \mathbb{P}\left(E_k^c\right) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}\left(E_k^c\right)$$

נמשיך, אם כן, ונקבל:

$$\mathbb{P}\left(\limsup E_n\right) = \lim_n \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} E_k^c\right)\right) = \lim_n \left(1 - \prod_{k \geq n} \mathbb{P}\left(E_k^c\right)\right)$$

נותר להוכיח:

$$\lim_n \prod_{k \geq n} \mathbb{P}\left(E_k^c\right) = 0$$

ואכן:

$$\lim_n \prod_{k \geq n} \mathbb{P}\left(E_k^c\right) = \lim_n \prod_{k \geq n} \left(1 - \mathbb{P}\left(E_k\right)\right) \leq \lim_n \prod_{k \geq n} e^{-\mathbb{P}(E_k)} = \lim_n e^{-\sum\limits_{k \geq n} \mathbb{P}(E_k)} = 0$$

■

דוגמא לכך שהדרישה לאי תלות הכרחית. נטיל מטבע הוגן פעם אחת, ונגדיר את כל המאורעות להיות אותו מאורע E - קיבלנו עץ. סכום ההסבתרויות הוא כמובן אינסופי, אבל

$$\limsup E_i = E$$

ולכן קורה בהסתברות $\frac{1}{2}$.

2 סדרת משתנים מקריים ממשיים בלתי תלויים

יש גישה עם משפט ההרחבה של קרתאודורי. אנחנו נעבוד בגישה אחרת.

שלב ראשון נראה שיש מרחב הסתברות, ועליו $X_1, X_2, \ldots$ בלתי תלויים, כאשר

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}$$

נבחר את המרחב להיות $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$. לכל נקודה $\omega \in [0,1]$ יש פיתוח בינארי (אם יש שתי אפשרויות, נבחר את האינסופי. באופן מפורש, המשתנים הם

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mathbb{1}_{\left\{\omega \geq \frac{1}{2}\right\}} \\ \omega_2 &= \mathbb{1}_{\left\{\omega \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right\}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

אזי התנאי על ההסתברויות מתקיים. כמו כן, המשתנים בלתי תלויים - די לבדוק לכל n ולכל $b_1, \ldots, b_n \in \{0,1\}$ שמתקיים

$$\mathbb{P}(\omega_1 = b_1, \ldots, \omega_n = b_n) = \frac{1}{2^n}$$

שלב שני נניח שנתונה סדרת מידות הסתברות $\mu_1, \mu_2, \ldots$ על הישר הממשי. אזי קיים מרחב הסתברות ומשתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots$ בלתי תלויים כך שלכל i מתקיים $\mathcal{L}(X_i) = \mu_i$.
ראשית נתמודד עם המקרה בו כל μ_i אחידה על $[0,1]$. נכתוב את המשתנים הקודמים, ω_i, במערך דו מימדי:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_{10} \\ \omega_2 & \omega_5 & \omega_9 & \ldots \\ \omega_6 & \omega_8 & \ldots & \\ \omega_7 & \ldots & & \end{array}$$

וכן הלאה. כעת, נגדיר X_i להיות המשתנה שספרותיו הבינאריות הן המשתנים שבשורה i במערך. נובע שכל X_i אחיד בקטע $[0,1]$ והם בלתי תלויים.
כעת, ראינו בתרגיל הבית שלכל מידת הסתברות μ על $\mathbb{R}$ קיימת $f_\mu : [0,1] \to \mathbb{R}$ מדידה כך שאם U משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$ אזי $\mathcal{L}(f_\mu(U)) = \mu$. כדי לסיים, ניקח $f_{\mu_1}(X_1), f_{\mu_2}(X_2), \ldots$.
נבחין שלאורך כל הבנייה, מרחב ההסתברות הוא $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$.

דוגמא לשימוש בבורל קנטלי: אם $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים בלתי תלויים, שלכל אחד התפלגות $\mathrm{Exp}(1)$, כלומר לכל $x \geq 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_i > x) = e^{-x}$$

נגדיר

$$L=\limsup_{n}\frac{X_n}{\log n}$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(L=1\right)=1$$

כי לכל $\varepsilon>0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n}>\left(1+\varepsilon\right)\right)=\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n}>\left(1-\varepsilon\right)\right)=\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$$

לכן רק מספר סופי של מאורעות מהסוג הראשון יקרו, מלמת בורל קנטלי הראשונה, אבל מספר אינסופי של מאורעות מהסוג השני יקרו, מלמת בורל קנטלי השנייה.

3 חוק 0-1 של קולמוגורוב

תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת משתנים מקריים. נגדיר

$$\mathcal{T}_n\coloneqq\sigma\left(X_n,X_{n+1},\ldots\right)$$

כמו כן, נגדיר את סיגמא אלגברת הזנב:

$$\mathcal{T}=\bigcap_{n}\mathcal{T}_n$$

משתנה מקרי ממשי Z מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב אם ורק אם הוא מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{T}_n$, לכל n, כלומר אם ורק אם קיימות פונקציות מדידות $f_1,f_2,\ldots$ כך שמתקיים

$$Z=f_n\left(X_n,X_{n+1},\ldots\right)$$

דוגמאות למאורעות בתוך $\mathcal{T}$:

$$\left\{\exists\lim_{n}X_n\right\}$$
$$\left\{\sum_{n}X_n<\infty\right\}$$

משתנה מקרי שמדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

משפט 3.1 (חוק 0־1 של קולמוגורוב) תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי:

1. לכל $A\in\mathcal{T}$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.
2. אם Z מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב $\mathcal{T}$, אז קיים $c\in[-\infty,\infty]$ כך שמתקיים $\mathbb{P}(Z=c)=1$.

הוכחה:

1. נרצה להראות שלכל $A\in\mathcal{T}$, A בלתי תלוי בעצמו, כלומר

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)^2$$

ולכן $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.
נגדיר $\mathcal{G}_n=\sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$. אזי $\mathcal{G}_n,\mathcal{T}_n$ בלתי תלויות. מספיק לבדוק למערכות פאי $\mathcal{I},\mathcal{J}$ שיוצרות אותן ־ נבחר

$$\mathcal{I}=\{\{X_1\le x_1,\ldots,X_{n-1}\le x_{n-1}\}\mid x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{J}=\{\{X_n\le x_n,\ldots,X_{n+k}\le x_{n+k}\}\mid k\in\mathbb{N},x_n,\ldots,x_{n+k}\in\mathbb{R}\}$$

ועל אלה זה כבר ברור.
מכאן, $\mathcal{G}_n,\mathcal{T}$ בלתי תלויות, שכן $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_n$. נובע כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוי בכל מאורע בתוך

$$\bigcup_n\mathcal{G}_n$$

וכיוון שזו מערכת פאי (אפילו אלגברה), נובע כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוי בסיגמא אלגברה

$$\sigma\left(\bigcup_n\mathcal{G}_n\right)$$

אבל, מתקיים גם

$$\sigma\left(\bigcup_n\mathcal{G}_n\right)=\sigma(X_1,X_2,\ldots)$$

שכן שתיהן הסיגמא אלגבראות המינימליות שמכילות כל תמונה הפוכה של קבוצה מדידה בורל תחת כל אחד מהמשתנים X_i. מכאן,

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n \subseteq \sigma\left(X_1, X_2, \dots\right) = \sigma\left(\bigcup_k \mathcal{G}_k\right)$$

ולכן נקבל כי $\mathcal{T}$ בלתי תלוייה בעצמה. לכן, כל מאורע בה בלתי תלוי בכל אחד אחר - ובפרט בעצמו.

2. נובע מכך שלכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(Z \le x\right) \in \{0, 1\}$$

■

דוגמא יהיו $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_j = 1\right) = \mathbb{P}\left(\varepsilon_j = -1\right) = \frac{1}{2}$$

אזי לכל $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_j \varepsilon_j \frac{1}{j^\alpha} < \infty\right) \in \{0, 1\}$$

למעשה,

$$\mathbb{P}\left(\sum_j \varepsilon_j \frac{1}{j^\alpha} < \infty\right) = \begin{cases} 1 & \alpha > \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

4 אינטגרציה

ראינו בפונקציות ממשיות. סימון חדש: אם μ מידה, f פונקציה מדידה, A קבוצה מדידה, נסמן

$$\mu\left(f\right) = \int f\left(x\right)\, \mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

$$\mu\left(f; A\right) = \mu\left(f \cdot \mathbb{1}_A\right) = \int_A f\left(x\right)\, \mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

5 תוחלת

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 5.1 נאמר כי $X\in L^{p}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אם

$$\int|X(\omega)|^{p}\ \mathrm{d}\mu(\omega)<\infty$$

ואז נסמן

$$||X||_{L^{p}}=\left(\int|X(\omega)|^{p}\ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 5.2 עבור משתנה מקרי $X\in L^{1}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, או משתנה מקרי אי שלילי, נגדיר

$$\mathbb{E}(X)=\int X(\omega)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

למשתנה מקרי אי שלילי אולי $\mathbb{E}(X)=\infty$.

5.1 משפטי התכנסות

תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת משתנים מקריים כך שמתקיים $X_n\to X$ כמעט תמיד, עבור משתנה מקרי X כלשהו.

משפט 5.3 (התכנסות מונוטונית) אם $X_n\uparrow X$, X_n אי שלילי, אזי $\mathbb{E}(X_n)\uparrow\mathbb{E}(X)$.

משפט 5.4 (התכנסות נשלטת) אם קיים משתנה מקרי $Y\in L^{1}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ כך שמתקיים $|X_n|\le Y$ כמעט תמיד, אזי $\mathbb{E}(X_n)\to\mathbb{E}(X)$.

משפט 5.5 (למת שֶפֶה) אם $\mathbb{E}(|X_n|)\to\mathbb{E}(|X|)$, אזי $\mathbb{E}(|X_n-X|)\to 0$ (התכנסות במרחב L_1).

משפט 5.6 (התכנסות חסומה) אם קיים $K<\infty$ כך שמתקיים $|X_n|<K$ כמעט תמיד, אזי $\mathbb{E}(X_n)\to\mathbb{E}(X)$.

משפט 5.7 (הלמה של פאטו) אם לכל n מתקיים $X_n\ge 0$, אזי

$$\mathbb{E}(X)\le\liminf_{n}\mathbb{E}(X_n)$$