הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

22 במרץ 2017

1 מאורעות - המשך

אנחנו תמיד במבנה של $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, כאשר Ω קבוצה, $\mathcal{F}$ סיגמא אלגברה, $\mathbb{P}$ מידת הסתברות.

משפט 1.1 (למת בורל קנטלי הראשונה) יהיו $E_1,E_2,\ldots$ מאורעות כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(E_i\right)<\infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(E_n\text{ i.o.}\right)=\mathbb{P}\left(\limsup E_n\right)=0$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}\left(\limsup E_n\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{k\geq n}E_k}_{decreasing}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n}E_k\right)\leq\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k\geq n}\mathbb{P}\left(E_k\right)}_{\substack{tail\,of\,a\\convergent\,series}}=0$$

■

2 משתנים מקריים

הגדרה 2.1 יהיו (S,Σ), $(T,\mathcal{T})$ מרחבים מדידים. אזי $h:S\to T$ נקראת <u>מדידה</u> אם לכל $A\in\mathcal{T}$ מתקיים $h^{-1}\left(A\right)\in\Sigma$.

אצלנו, כמעט תמיד, $T\in\left\{\mathbb{R},\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}$, ואז $\mathcal{T}=\mathcal{B}\left(T\right)$. לעתים נאפשר לפונקציות לקבל את הערך $\pm\infty$. נתאר כעת מספר הגדרות ספציפית עבור $(T,\mathcal{T})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ (או אולי $T=[-\infty,\infty]$).

הגדרה 2.2 אוסף הפונקציות המדידות מהמרחב (S,Σ) למרחב $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ יסומן $m\Sigma$.

הגדרה 2.3 תת הקבוצה של $m\Sigma$ של פונקציות מדידות ואי שליליות תסומן $(m\Sigma)^+$.

הגדרה 2.4 תת הקבוצה של $m\Sigma$ של פונקציות מדידות וחסומות תסומן $b\Sigma$.

הגדרה 2.5 אם S מרחב טופולוגי, וכן $\Sigma = \mathcal{B}(S)$, אזי פונקציה מדידה $h : S \to T$ תקרא <u>בורל</u>.

2.1 כיצד נבדוק שפונקציה מדידה?

תהי $h : (S, \Sigma) \to (T, \mathcal{T})$.

טענה 2.6
1. פעולות על קבוצות נשמרות על ידי h^{-1}. בפרט

$$h^{-1}(A^c) = \left(h^{-1}(A)\right)^c$$
$$h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} h^{-1}(A_i)$$

2. מסקנה מיידית: אם $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$, אזי אם $h^{-1}(C) \in \Sigma$ לכל $C \in \mathcal{C}$, אזי h מדידה.
3. בפרט, אם $(T, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מספיק לבדוק כי $h^{-1}((-\infty, x)) \in \Sigma$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
4. אם $(S, \Sigma), (T, \mathcal{T})$ מרחבים טופולוגיים, $\Sigma = \mathcal{B}(S), \mathcal{T} = \mathcal{B}(T)$, אז אם h רציפה, h מדידה.

הוכחה: 1 מוכר ולא קשה, לכן לא נוכיח אותו. נוכיח את 2:
לפי 1, הקבוצה $\left\{A \in \mathcal{T} \mid h^{-1}(A) \in \Sigma\right\}$ היא סיגמא אלגברה, ומכילה את $\mathcal{C}$, ולכן $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \left\{A \in \mathcal{T} \mid h^{-1}(A) \in \Sigma\right\}$.
3 ברור מתוך 2, כי אוסף הקרניים יוצר את הסיגמא אלגברה $\mathcal{B}$.
עבור 4, נשתמש שוב בסעיף 2. $\mathcal{T}$ נוצרת על ידי אוסף הקבוצות הפתוחות, ולכן מספיק לבדוק כי $h^{-1}(O) \in \Sigma$ לכל $O \subseteq T$ פתוחה. מרציפות h, $h^{-1}(O) \subseteq S$ פתוחה, ולכן $h^{-1}(O) \in \Sigma = \mathcal{B}(S)$. ■

טענה 2.7 אם $h_1 : (S, \Sigma) \to (T_1, \mathcal{T}_1)$, $h_2 : (T_1, \mathcal{T}_1) \to (T_2, \mathcal{T}_2)$ מדידות, אזי גם ההרכבה $h_2 \circ h_1 : (S, \Sigma) \to (T_2, \mathcal{T}_2)$ היא מדידה.

לא נוכיח, אבל ההוכחה קלה מאוד.

2.1.1 מכפלות של מרחבים מדידים

נרצה להגדיר מבנה של מרחב מדיד על $T_1 \times T_2$, כאשר $(T_1, \mathcal{T}_1), (T_2, \mathcal{T}_2)$ מרחבים מדידים. הסיגמא אלגברה תהיה $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, שאותה נגדיר באופן הבא:

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \sigma\left(\{A_1 \times T_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{T_1 \times A_2 \mid A_2 \in \mathcal{T}_2\}\right)$$

אפשר גם יותר גורמים:

$$(T_1,\mathcal{T}_1)\times\cdots\times(T_n,\mathcal{T}_n)=(T_1\times\cdots\times T_n,\mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n)$$

כאשר מדובר בסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה כל קבוצה מהצורה $T_1\times T_2\times\cdots\times T_{i-1}\times A_i\times T_{i+1}\times\cdots\times T_{n-1}\times T_n$, כאשר $A_i\in\mathcal{T}_i$.
ניתן להגדיר את אותו הדבר גם עבור כמות אינסופית של של גורמים (מעצמה כלשהי).

תרגיל יהיו (S,Σ), $((T_i,\mathcal{T}_i))_{i\in I}$ מרחבים מדידים. אזי פונקציה

$$h:(S,\Sigma)\to\bigtimes_{i\in I}(T_i,\mathcal{T}_i)$$

היא מדידה אם ורק אם כל קואורדינטה שלה מדידה - כלומר, אם נגדיר לכל קואורדינטה הטלה $p_j(t)=t_j$, אזי h מדידה אם ורק אם לכל $i\in I$: $p_j\circ h$: $(S,\Sigma)\to(T_i,\mathcal{T}_i)$ מדידה.

הערה 2.8 סיגמא אלגברת המכפלה קטנה מדי אם I גדול מבן מניה. למשל נתון $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ לכל $i\in[0,1]$. מהי

$$\bigtimes_{i\in[0,1]}(\mathbb{R},\mathcal{B})=\left(\mathbb{R}^{[0,1]},\mathcal{B}^{[0,1]}\right)$$

הנקודות במרחב הן $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, וקבוצה של פונקציות מדידה אם ורק אם היא מערבת (באופן מדיד) רק מספר בן מניה של קואורדינטות. למשל, אוסף הפונקציות הרציפות לא מדיד.

תרגיל הראו כי

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=(\mathcal{B}(\mathbb{R}))^n$$

למה 2.9 תהיינה $h_1,h_2:(S,\Sigma)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ מדידות. אזי $h_1+h_2,h_1\cdot h_2$ ועוד הרבה אחרות הן מדידות.

הוכחה: נגדיר $h:(S,\Sigma)\to\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}^2\right)$ על ידי $h(s)=(h_1(s),h_2(s))$. זו מדידה, מהתרגיל הראשון. נגדיר גם את

$$a:\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$$

על ידי

$$a(x,y)=x+y$$

זו פונקציה רציפה, ולכן בפרט מדידה. כעת, h_1+h_2 היא ההרכבה $a\circ h$, ולכן מדידה.
כך מוכיחים כל דבר דומה. ■

גם גבולות של סדרות פונקציות מדידות הם מדידים.

למה 2.10 תהי $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מתוך $m\Sigma$, כלומר $h_n:(S,\Sigma)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ מדידה לכל n. אזי גם $\inf h_n(s)$, $\sup h_n(s)$ מדידות, וכך גם $\liminf h_n, \limsup h_n$. כמו כן, הקבוצה

$$\left\{s\in S \mid \exists \lim_{n\to\infty} h_n(s)\right\}$$

הוכחה: נתחיל עם $\inf h_n$. די להראות שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$(\inf h_n)^{-1}((-\infty,x))\in\Sigma$$

נשים לב כי

$$(\inf h_n)^{-1}((-\infty,x))=\left\{s\in S \mid \inf_n h_n(s)<x\right\}=\{s\in S \mid \exists n\ \ h_n(s)<x\}=$$
$$=\bigcup_n h_n^{-1}((-\infty,x))\in\Sigma$$

באופן דומה נקבל מדידות של $\sup h_n$. כעת נראה עבור $\liminf h_n$. נבחים כי

$$\liminf_{n\to\infty} h_n=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\inf_{k\geq n} h_n(s)}_{increasing}=\sup_n\inf_{k\geq n} h_n(s)$$

כעת נקבל מדידות מהמדידות של $\inf,\sup$. באופן דומה מקבלים מדידות של $\limsup$.
כדי לבדוק מדידות של הקבוצה עליה הגבול קיים, נבחין כי

$$\{s\in S \mid \exists\lim h_n(s)\}=\{s\in S \mid \limsup h_n(s)-\liminf h_n(s)=0\}=(\limsup h_n-\liminf h_n)^{-1}(0)\in\Sigma$$

■

2.2 משתנים מקריים

כעת, יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 2.11 פונקציה מדידה $h:\Omega\to T$ נקראת משתנה מקרי שמקבל ערכים במרחב T (ואם לא נציין אם T, ולא יהיה ברור אחרת, אזי $(T,\mathcal{T})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$).

דוגמא אינסוף הטלות מטבע. $\Omega=\{h,t\}^{\mathbb{N}}$, והסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי $\{h,t\}\times\cdots\times\{h,t\}\times\{t\}\times\{h,t\}\times\ldots$. לא נדון עדיין במידה $\mathbb{P}$. כעת נגדיר

$$X_n:\Omega\to\{0,1\}$$

על ידי

$$X_n(\omega)=\begin{cases}1 & \omega_n=t\\ 0 & \omega_n=h\end{cases}$$

האם

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\frac{2}{3}\right\}$$

הוא מאורע? התשובה היא כן. לכל n, $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ הוא משתנה מקרי, ולכן גם

$$L^+=\limsup_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$
$$L^-=\liminf_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

הם משתנים מקריים והמאורע הנתון הוא

$$\left\{L^+=\frac{2}{3}\right\}\cap\left\{L^-=\frac{2}{3}\right\}$$

2.2.1 סיגמא אלגברה שנוצרת ממשתנים מקריים

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. יהיו $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ משתנים מקריים.

הגדרה 2.12 נסמן בתור $\sigma\left(\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\right)$ את הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי כל התמונות ההפוכות דרך Y_γ. נאמר כי $Y_\gamma:(\Omega,\mathcal{F})\to(T_\gamma,\mathcal{T}_\gamma)$, אזי $\sigma\left(\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\right)$ נוצרת על ידי $Y_\gamma^{-1}(A)$ כאשר $\gamma\in\Gamma$, $A\in\mathcal{T}_\gamma$.

דוגמא בהקשר של הדוגמא הקודמת, מהי $\sigma(X_1,X_2)$? מתקיים

$$\sigma(X_1,X_2)=\{A\times B\times\{h,t\}\times\cdots\mid A,B\subseteq\{h,t\}\}$$

בנוסף

$$\mathcal{F}=\sigma(X_1,X_2,\dots)$$

הערה 2.13 אם $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים, אזי

$$\sigma\left((Y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=\sigma\left(\bigcup_k\sigma(Y_1,\dots,Y_k)\right)$$

2.3 אינטואיציה

נחשוב על ניסוי כהגרלת $\omega \in \Omega$ מפולג לפי המידה $\mathbb{P}$. אם $A \in \mathcal{F}$ עבורו $\omega \in A$ "קרה", וכל $A \in \mathcal{F}$ עבורו $\omega \notin A$ "לא קרה". בתוך $\sigma\left(\left(Y_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}\right)$ נמצא "המידע" לגבי המשתנים Y_γ במובן הבא: אם יתגלה לנו הערך $Y_\gamma(\omega)$ לכל $\gamma \in \Gamma$, אוכל לדעת לגבי כל מאורע $A \in \sigma\left(\left(Y_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}\right)$ אם הוא קרה או לא.

משפט 2.14 אם $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (T, \mathcal{T})$ מדיד, $h : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(Y)$, אזי קיימת $f : (T, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ מדידה כך שמתקיים $h = f \circ \gamma$ (וגם להיפך, $f \circ \gamma$ מדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(Y)$).

לא נוכיח כאן את המשפט.

2.4 התפלגות של משתנה מקרי

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהי X משתנה מקרי (ממשי).

הגדרה 2.15 ההתפלגות של X, $\mathcal{L}(X)$, היא מידת ההסתברות על $\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי

$$\mathcal{L}(X)(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

לכל $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

נאמר למשל כי $X \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{2}{3}\right)$ אם $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{3}$. במילים אחרות, המידה $\mathcal{L}(X)$ תמוכה על $\{0,1\}$, ונותנת משקל $\frac{2}{3}$ עבור 1, $\frac{1}{3}$ עבור 0.

הגדרה 2.16 פונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ המוגדרת על ידי

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$

זו דרך לתאר את $\mathcal{L}(X)$, כי שתי התפלגויות $\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)$ הן זהות אם ורק אם $F_X = F_Y$.

טענה 2.17 יהי X משתנה מקרי.

1. F_X מונוטונית לא יורדת, כלומר אם $x \le y$ אזי $F_x(x) \le F_x(y)$.
2. $$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$
3. F_X רציפה מימין, כלומר לכל x מתקיים
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$

הוכחה:

1. ברור.
2. למשל נראה כי

$$\lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\underbrace{X \le n}_{increasing}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{X \le n\}\right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

לפי 1 זה מספיק.

3. יהי $x \in \mathbb{R}$. אזי

$$\lim_{n\to\infty} F_X\left(x+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\underbrace{X \le x+\frac{1}{n}}_{decreasing}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n \left\{X \le x+\frac{1}{n}\right\}\right) = \mathbb{P}(X \le x) = F_X(x)$$

■

טענה 2.18 כל $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ עם התכונות מהטענה הקודמת היא פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרה. בפירוט נוסף, קיים

$$X : ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb}) \to \mathbb{R}$$

מדיד, כך שמתקיים $F = F_X$.

טענה זו תוכח בתרגיל ובתרגול (בניית סקורוחוד).

2.5 משפט המחלקה המונוטונית

משפט 2.19 תהי H קבוצה של פונקציות חסומות מקבוצה S אל $\mathbb{R}$ שמקיימת:

1. H מרחב לינארי (סגור לסכום וכפל בסקלר).
2. הפונקציה הקבועה 1 נמצאת בתוך H.
3. אם f_n סדרת פונקציות אי שליליות מתוך H, כך שמתקיים $f_n \uparrow f$ כאשר f חסום, אזי $f \in H$.

אזי אם H מכיל את 1_A לכל $A \in I$, כאשר I היא מערכת פאי, אזי H מכיל כל פונקציה חסומה ומדידה ביחס לסיגמא אלגברה $\sigma(I)$.

3 אי תלות

נתחיל כעת, ונמשיך בשיעור הבא. כאן לראשונה אנחנו יוצאים מהתחום שנגענו בו בפונקציות ממשיות.

הגדרה 3.1 סיגמא אלגבראות $\mathcal{F} \supseteq \cdots, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ הן בלתי תלויות אם לכל $i_1, \ldots, i_n$ ולכל $A_{i_1} \in G_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in G_{i_n}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_{i_j}\right)$$

הגדרה 3.2 משתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots$ הם בלתי תלויים אם $\sigma\left(X_1\right), \sigma\left(X_2\right), \ldots$ הן בלתי תלויות.

הגדרה 3.3 מאורעות $E_1, E_2, \ldots$ הם בלתי תלויים אם האינדיקטורים שלהם בלתי תלויים.