<u>הסתברות למתמטיקאים</u>

ⓒ ארזים

7 ביוני 2017

1 אינטגרביליות במידה שווה

אבחנה יהי X משתנה מקרי מתוך L^1. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים K עבורו

$$\mathbb{E}\left(|X|\,\mathbb{1}_{|X|>K}\right) < \varepsilon$$

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\lim_{K\to\infty} |X|\,\mathbb{1}_{|X|>K} = 0$$

כמעט תמיד. מהתכנסות נשלטת (מספיק מונוטונית) נקבל

$$\mathbb{E}\left(|X|\,\mathbb{1}_{|X|>K}\right) \to 0$$

ולכן נסיים. ■

הגדרה 1.1 אוסף $\mathcal{C}$ של משתנים מקריים נקרא <u>אינטגרבילי במידה שווה</u> אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים K כך שמתקיים

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\left(|X|\,\mathbb{1}_{|X|>K}\right)$$

לא־דוגמה ניקח

$$X_n \sim \begin{cases} n & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

אזי $\mathbb{E}\,|X_n| = 1$ לכל n, כלומר הם חסומים בנורמת L^1, אבל לכל K מתקיים

$$\mathbb{E}\left(|X_{K+1}|\,\mathbb{1}_{|X_{K+1}|>K}\right) = \mathbb{E}\,|X_{K+1}| = 1$$

לכן המשתנים הללו לא אינטגרביליים במידה שווה. כמו כן, $X_n \to 0$ כמעט תמיד אבל $\mathbb{E}\left(X_n\right) \not\to 0$.

תכונה אם $\mathcal{C}$ אוסף של משתנים מקריים אינטגרביליים במידה שווה אזי $\mathcal{C}$ חסום בנורמת L^1: יהי $\varepsilon = 1$ וניקח K מתאים. כעת לכל $X \in \mathcal{C}$ מתקיים

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right) + \mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{|X|\leq K}\right) \leq 1 + K$$

1.1 תנאים מספיקים לאינטגרביליות במידה שווה

1. אם קיים Y אינטגרבילי עם $|X| \leq Y$ לכל $X \in \mathcal{C}$, אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה.
הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. יהי K עבורו $\mathbb{E}\left(Y \mathbb{1}_{|Y|>K}\right) < \varepsilon$. אזי

$$\mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right) \leq \mathbb{E}\left(Y \mathbb{1}_{|X|>K}\right) \leq \mathbb{E}\left(Y \mathbb{1}_{|Y|>K}\right) < \varepsilon$$

וזאת לכל $X \in \mathcal{C}$. ■

2. אם קיים $p > 1$ שמקיים

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left(|X|^p\right) < \infty$$

כלומר $\mathcal{C}$ חסום בנורמת L^p, אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה. **הוכחה:** יהי $X \in \mathcal{C}$. אזי

$$\mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X|^p \mathbb{1}_{|X|>K}\right)}{K^{p-1}} \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)}{K^{p-1}} \leq \frac{\sup_{X \in \mathcal{C}}\left(\mathbb{E}|X|^p\right)}{K^{p-1}} < \varepsilon$$

עבור K גדול מספיק, וסיימנו. ■

כדי לראות טענות מורכבות יותר, נזדקק ללמה הבאה.

למה 1.2 יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם F מאורע עם $\mathbb{P}(F) < \delta$, אזי $\mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_F\right) < \varepsilon$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ ואוסף מאורעות (F_n) כך שמתקיים $\mathbb{P}(F_n) \leq \frac{1}{n^2}$, אבל $\mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{F_n}\right) > \varepsilon$. נגדיר

$$F = \limsup_{n\to\infty} F_n$$

ואז מלמת בורל קנטלי הראשונה נקבל $\mathbb{P}(F) = 0$. כעת, מלמת פאטו (ההפוכה) נקבל

$$0 = \mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty} |X| \mathbb{1}_{F_n}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{F_n}\right) > \varepsilon$$

בסתירה. ■

דוגמא מרכזית. יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. נגדיר

$$\mathcal{C}=\{\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\mid\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}\,is\,a\,sigma\,algebra\}$$

אזי $\mathcal{C}$ אינטגרבילי במידה שווה.

הוכחה: תהי $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ תת סיגמא אלגברה. אזי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\right|\mathbb{1}_{\left|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right|>K}\right) &\leq_{1}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mid\mathcal{G}\right)\mathbb{1}_{\left|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right|>K}\right)=\\ &=\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mathbb{1}_{\left|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right|>K}\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

המעבר שמסומן 1 נובע מאי שוויון ינסן המותנה. המעברים האלה יהיו מוצדקים אם נראה שלכל δ קיים K עבורו לכל $\mathcal{G}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\right|>K\right)<\delta$. אכן,

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\right|>K\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(X\mid\mathcal{G}\right)\right|\right)}{K}\leq\frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mid\mathcal{G}\right)\right)}{K}=\frac{\mathbb{E}\left(\left|X\right|\right)}{K}$$

ומכאן נסיים. ■

משפט 1.3 תהי (X_n) סדרה מתוך L^1, ויהי X משתנה מקרי מתוך L^1. אזי $X_n\to X$ בנורמת L^1 אם ורק אם $X_n\to X$ בהסתברות וגם (X_n) אינטגרבילית במידה שווה.

הוכחה: נניח ראשית את צד שמאל. נגדיר פונקציית קיטום רציפה, $\varphi_K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי

$$\varphi_{K}\left(x\right)=\begin{cases}K & x\geq K\\ x & x\in[-K,K]\\ -K & x\leq-K\end{cases}$$

נבחין שמתקיים

$$\mathbb{E}\left|X_{n}-X\right|\leq\mathbb{E}\left|X_{n}-\varphi_{K}\left(X_{n}\right)\right|+\mathbb{E}\left|\varphi_{K}\left(X_{n}\right)-\varphi_{K}\left(X\right)\right|+\mathbb{E}\left|\varphi_{K}\left(X\right)-X\right|$$

נטפל ראשית בגורם האמצעי. כיוון שמתקיים $\left|\varphi_K\left(x\right)-\varphi_K\left(y\right)\right|\leq\left|x-y\right|$, נובע שמתקיים

$$\varphi_{K}\left(X_{n}\right)\to\varphi_{K}\left(X\right)$$

בהסתברות. לכן, ממשפט ההתכנסות החסומה, נקבל שלכל K מתקיים

$$\mathbb{E}\left|\varphi_{K}\left(X_{n}\right)-\varphi_{K}\left(X\right)\right|\to0$$

עבור הגורמים האחרים, מתקיים

$$\mathbb{E}\left|X_{n}-\varphi_{K}\left(X_{n}\right)\right|\leq\mathbb{E}\left(\left|X_{n}\right|\mathbb{1}_{\left|X_{n}\right|>K}\right)$$

אפשר לבחור K גדול מספיק עבורו גורם זה קטן מאשר ε לכל n, מאינטגרביליות במידה שווה. אותו נימוק מתייחס גם לגורם השלישי, ולכן סיימנו את הכיוון הזה.
בכיוון השני, ראשית נראה התכנסות בהסתברות. מאי שוויון מרקוב:

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\,|X_n - X|}{\varepsilon} \to 0$$

בשביל אינטגרביליות במידה שווה, נבחין כי

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\,\mathbb{1}_{|X_n|>K}\right) \leq \mathbb{E}\left(|X_n|\,\mathbb{1}_{|X_n|>K}\right) + \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right)$$

הגורם הימני שואף לאפס, ולכן נותר רק להוכיח שהגורם השמאלי קטן. נעריך את הסתברות המאורע $|X_n| > K$. מאי שוויון מרקוב ואי שוויון המשולש נקבל

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > K\right) \leq \frac{\mathbb{E}\,|X_n|}{K} \leq \frac{\mathbb{E}\,|X| + \mathbb{E}\,|X - X_n|}{K} \leq \frac{\mathbb{E}\,|X| + \sup_n \mathbb{E}\,|X_n - X|}{K}$$

קיבלנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים K וקיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\,\mathbb{1}_{|X_n|>K}\right) < 2\varepsilon$$

לכל אחד מאותם $1 \leq n < N$ קיים K_n משלו כך שמתקיים

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\,\mathbb{1}_{|X_n|>K_n}\right) < \varepsilon$$

ואז כדי לסיים ניקח

$$K' = \max\left(K, (K_n)_{n=1}^{N}\right)$$

■

1.2 מרטינגלים אינטגרביליים במידה שווה

נזכר שמרטינגל M שחסום בנורמת L^1 מתכנס כמעט תמיד, אבל לא בהכרח מתכנס בנורמת L^1. נראה כעת שהתכנסות בנורמת L^1 שקולה לאינטגרביליות במידה שווה. יהי $M = (M_n)$ מרטינגל אינטגרבילי במידה שווה. אזי M חסום בנורמת L^1, ולכן מתכנס כמעט תמיד. מהמשפט שראינו לפני רגע, נובע שמתקיים גם $M_n \to M_\infty$ בנורמת L^1.
במקרה של מרטינגל אינטרגבילי במידה שווה, ניתן לחשוב שהגדרנו $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots,\infty}$.
תכונות המרטינגל הן:

1. M_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_n$.
2. M_n אינטגרבילי.

3. לכל $n \geq k$ מתקיים $\mathbb{E}\left(M_n \mid \mathcal{F}_k\right) = M_k$.

נראה שתכונות אלה מתקיימות עבור M_∞. כרגיל, מגדירים $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup \mathcal{F}_n\right)$. כעת, M_∞ מדיד לפי $\mathcal{F}_\infty$, וכמובן אינטגרבילי. נבדוק שלכל n מתקיים $\mathbb{E}\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right) = M_n$ כמעט תמיד. נרצה להראות שלכל מאורע $F \in \mathcal{F}_n$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(M_\infty \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(M_n \mathbb{1}_F\right)$$

ידוע לנו מתכונת המרטינגל שלכל $r \geq n$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(M_\infty \mathbb{1}_F\right) \leftarrow \mathbb{E}\left(M_r \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(M_n \mathbb{1}_F\right)$$

ולכן סיימנו. באופן דומה, ניתן להראות הוכיח שלתת מרטינגל Mאינטגרבילי במידה שווה יש M_∞ ומתקיים $M_n \to M_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L_1, וכן

$$\mathbb{E}\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right) \geq M_n$$

לכל n כמעט תמיד.

משפט 1.4 (ההתכנסות העולה של לוי) יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. תהי $\left(\mathcal{F}_n\right)$ פילטרציה. נגדיר מרטינגל $\left(M_n\right)$ על ידי

$$M_n = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_n\right)$$

ונזכר בהגדרה

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$$

אזי $M_n \to \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_\infty\right)$ כמעט תמיד ובנורמת L^1.

הוכחה: נבחין כי M אינטגרבילי במידה שווה, מהדוגמה המרכזית בחלק הקודם. לכן קיים M_∞ עם $M_n \to M_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L^1. נותר להראות $M_\infty = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_\infty\right)$ כמעט תמיד, כלומר יש להראות שלכל $F \in \mathcal{F}_\infty$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(M_\infty \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_F\right)$$

מספיק להראות זאת עבור X אי שלילי, וכמו כן מספיק להראות זאת רק עבור $F \in \bigcup \mathcal{F}_n$, כיוון שזו מערכת π שיוצרת את $\mathcal{F}_\infty$ (אפשר לנמק את זה על ידי הגדרת שתי מידות שמזדהות על המערכת, ולכן גם על כל $\mathcal{F}_\infty$).

יהי $F \in \mathcal{F}_n$, ונוכיח את השוויון. אכן, ממה שראינו קודם,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_\infty \mathbb{1}_F\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_\infty \mathbb{1}_F \mid \mathcal{F}_n\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_n\right)\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(M_n \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_F\right) = \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_F\right)\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.5 (חוק 0־1 של קולמוגורוב) תהי (X_n) סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי לכל $A \in \mathcal{T}$ (סיגמא אלגברת הזנב) מתקיים $P(A) \in \{0,1\}$.

הוכחה: נגדיר פילטרציה $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. נבחר $A \in \mathcal{T}$ ונשתמש במשפט ההתכנסות העולה עבור $\mathbb{1}_A$. נגדיר $M_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n)$, ומהמשפט העולה נקבל

$$M_n \to \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{1}_A$$

כמעט תמיד ובנורמת L^1. $A \in \mathcal{T}$ ולכן בפרט A מדיד לפי $\sigma(X_{n+1}, \dots, X_{n+2})$, ולכן בלתי תלוי בסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_n$. מכאן נקבל

$$M_n = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

קיבלנו כי $\mathbb{P}(A) = M_n \to \mathbb{1}_A$ כמעט תמיד. לכן נקבל $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ בהכרח. ■

משפט 1.6 (ההתכנסות היורדת של לוי) תהי $(\mathcal{G}_{-n})_{n=0}^{\infty}$ סדרת סיגמא אלגבראות, כאשר $\mathcal{G}_{-(n+1)} \subseteq \mathcal{G}_{-n}$. נגדיר $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap \mathcal{G}_{-n}$. יהי X משתנה מקרי אינטגרבילי. נגדיר

$$M_{-n} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n})$$

אזי קיים משתנה מקרי $M_{-\infty}$ עם $M_{-n} \to M_{-\infty}$ כמעט תמיד ובנורמת L^1, וכן $M_{-\infty} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-\infty})$.

הוכחה: אותו נימוק שראינו במשפט התכנסות המרטינגלים באמצעות כמות החציות מראה שגם כאן קיים $M_{-\infty}$ כך שמתקיים $M_{-n} \to M_{-\infty}$ כמעט תמיד. מכאן נוכל לטעון בדיוק באותה צורה כמו במשפט ההתכנסות העולה. ■

מסקנה 1.7 (החוק החזק של המספרים הגדולים) תהי X_n סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים, שווי התפלגות ואינטגרביליים. נסמן $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. אזי $\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X_1$ כמעט תמיד (ואפילו בנורמת L^1).

הוכחה: נפעיל את המשפט היורד עבור המשתנה המקרי $X = X_1$. נגדיר $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$. תרגיל למחשבה נותן

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}) = \frac{S_n}{n}$$

כמעט תמיד, מסימטריה. מהמשפט היורד של לוי קיים $M_{-\infty}$ עם שעבורו $\frac{S_n}{n} \to M_{-\infty}$ כמעט תמיד ובנורמת L^1. מתקיים בהכרח

$$\mathbb{E}(M_{-\infty}) = \mathbb{E}(X_1)$$

מחוק 0־1 של קולמוגורוב הגבול של $\frac{S_n}{n}$ הוא משתנה מקרי קבוע כי הוא מדיד ביחס לסיגמא אלגברת הזנב. ■