הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

15 במרץ 2017

הקורס הוא המשך של מבוא להסתברות ־ שם דיברנו על מרחבים לכל היותר בני מניה. למשל, סדרת הטלות מטבע בלתי תלויות היא דבר שאי אפשר לממש במרחב בן מניה ־ נסמן את התוצאה של ההטלה מספר n בתור ε_n, שהוא 1 או -1, בהסתברות חצי ־ כי יש $\aleph$ סדרות שכאלה, והמרחב לא בן מניה.

כדי לדבר על דברים כאלה צריך מידה, ועוד כל מיני דברים שלמדנו בממשיות.

שאלות

1. יהי $\alpha > 0$. האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{n^\alpha}$$

מתכנס? הכוונה ־ האם מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$$

נשאיר את העניין פתוח בינתיים.

2. הילוך מקרי פשוט: נגדיר

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

נרצה לחשב את הדבר הבא:

$$\mathbb{P}\left(\left|\{n \mid S_n = 0\}\right| = \infty\right)$$

נוכל לעשות את אותו הדבר עבור 2 מימדים, או שלושה, וכמובן יותר, ולדון בשאלה שהעלינו. מסתבר שההסתברות שלעיל היא 1 אם המימד הוא 1 או 2, ואפס אם המימד הוא לפחות 3.

3. תהליך הסתעפות: רוצים לדעת האם שם משפחה יחזיק לנצח. מתחילים מאב אחד, ובכל שלב כל משתתף מוליד ילדים לפי התפלגות מסויימת (לשם פשטות,

כולם באותה התפלגות). כך נקבל עץ תורשה מקרי. השאלה היא האם הוא יגיע לעומק אינסופי. אפשר גם להתחיל מעץ בינארי מלא, וכל קשת, באופן בלתי תלוי, לשמור בסיכוי p ולמחוק בסיכוי $1-p$. כלומר לכל אדם יש $0,1,2$ ילדים - במודל הקודם, התפלגות כמות הילדים היא:

$$\begin{cases} 0 & (1-p)^2 \\ 1 & 2p\left(1-p\right) \\ 2 & p^2 \end{cases}$$

נסמן את המאורע בו העץ ממשיך לנצח בתור A. נרצה לדעת מה היא $\mathbb{P}\left(A\right)$. מסתבר שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \begin{cases} 0 & p \leq \frac{1}{2} \\ \geq 0 & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1 מרחבי מידה

תהי S קבוצה.

הגדרה 1.1 Σ_0 תקרא <u>אלגברה</u> של קבוצות של S אם:

1. $\emptyset \in \Sigma_0$.
2. אם $A \in \Sigma_0$, אזי $A^c \in \Sigma_0$.
3. אם $A, B \in \Sigma_0$, אזי $A \cup B \in \Sigma_0$.

הגדרה 1.2 Σ תקרא <u>סיגמא אלגברה</u> של קבוצות של S אם היא אלגברה, וכן אם $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ אזי גם

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$$

הגדרה 1.3 <u>מרחב מדיד</u> הוא זוג $\left(S, \Sigma\right)$, כאשר S קבוצה, Σ סיגמא אלגברה של קבוצות של S.

הגדרה 1.4 תהי S קבוצה, $\mathcal{C}$ אוסף של תת קבוצות של S. אזי $\Sigma = \sigma\left(\mathcal{C}\right)$ היא הסיגמא אלגברה הקטנה ביותר של קבוצות של S כך שמתקיים $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$. באופן שקול, Σ היא חיתוך כל הסיגמא אלגבראות שמכילות את $\mathcal{C}$. נאמר כי Σ <u>נוצרת</u> על ידי $\mathcal{C}$.

1.1 סיגמא אלגברת בורל

הגדרה 1.5 יהי S מרחב טופולוגי. אזי הסיגמא אלגברה שנוצרת על ידי אוסף הקבוצות הפתוחות נקראת סיגמא אלגברת בורל, ומסומנת $\mathcal{B}(S)$.

בפרט, את $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, סיגמא אלגברת בורל של הישר הממשי, נסמן $\mathcal{B}$. כעת נסמן

$$\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$$

טענה 1.6

$$\sigma(\pi(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

הוכחה: ראשית, נראה כי $\sigma(\pi(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}$. לצורך כך מספיק להראות כי $\pi(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}$. יהי $x \in \mathbb{R}$. נרצה להראות כי $(-\infty, x]$ היא מדידה בורל. למשל, $(-\infty, x]^c = (x, \infty)$ קבוצה פתוחה, ולכן הקרן אכן מדידה בורל.

שנית, נרצה להראות כי $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. מספיק להראות כי כל הקבוצות הפתוחות נמצאות בתוך $\sigma(\pi(\mathbb{R}))$. כל קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}$ היא איחוד, לכל היותר בן מניה, של קטעים פתוחים מתוך $\mathbb{R}$ מהצורה (a,b) - כאשר אולי a, b אינסופיים. יהיו $a < b$ סופיים. מספיק להראות כי $(a,b) \in \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. אכן,

$$(a,b) = (-\infty, a]^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right]$$

■

1.2 מידות

הגדרה 1.7 תהי S קבוצה ותהי Σ_0 אלגברה של קבוצות של S. תהי $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$. אזי μ_0 נקראת חיבורית אם $\mu_0(\emptyset) = 0$, וכן לכל זוג קבוצות זרות $A, B \in \Sigma_0$ מתקיים

$$\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$$

μ_0 נקראת סיגמא חיבורית אם $\mu_0(\emptyset) = 0$, וכן לכל $A_1, A_2, \dots \in S$ שמקיימות

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$$

מתקיים

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

הגדרה 1.8 מרחב מידה הוא שלשה (S,Σ,μ) כאשר S קבוצה, Σ סיגמא אלגברה, וכן μ מידה - פונקציה סיגמא חיבורית על Σ.

מרחב מידה נקרא סופי אם $\mu(S)<\infty$, ונקרא סיגמא סופי אם יש סדרה $S_1,S_2,\dots\in\Sigma$, המקיימות

$$\mu(S_n)<\infty$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=S$$

המרחב נקרא מרחב הסתברות אם $\mu(S)=1$.

הגדרה 1.9 קבוצה $A\in\Sigma$ נקראת זניחה במרחב מידה (S,Σ,μ) אם $\mu(A)=0$.

אם תכונה מתקיימת על המשלים של קבוצה זניחה, נאמר שהיא מתקיימת כמעט בכל מקום. אם μ מידת הסתברות, נאמר כי התכונה מתקיימת כמעט תמיד.

1.2.1 זהות של מידות

למה 1.10 נתונות זוג מידות μ_1,μ_2 על אותו מרחב מדיד (S,Σ). נאמר כי $\pi\subseteq\Sigma$ היא אוסף קבוצות המהווה מערכת פאי - כלומר, אם $A,B\in\pi$, אזי גם $A\cap B\in\pi$. כמו כן, נניח כי $\Sigma=\sigma(\pi)$. אז אם $\mu_1(A)=\mu_2(A)$ לכל $A\in\pi$, וכן $\mu_1(S)=\mu_2(S)<\infty$, אזי $\mu_1=\mu_2$.

מסקנה 1.11 שתי מידות הסתברות שמזדהות על מערכת פאי שיוצרת את הסיגמא אלגברה הן זהות.

דוגמא לכך שהתנאי $\mu(S_1)=\mu(S_2)<\infty$: $S=\{1,2\}$, $\pi=\{\{1\}\}$. אם $\mu_1(\{1\})=\mu_2(\{1\})$ נובע כי $\mu_1(\{2\}),\mu_2(\{2\})$ רק כאשר $\mu_1(S)=\mu_2(S)<\infty$.

משפט 1.12 (משפט ההרחבה של קרתאודורי) תהי S קבוצה, Σ_0 אלגברה על S, וכן $\Sigma=\sigma(\Sigma_0)$. אם $\mu_0:\Sigma_0\to[0,\infty]$ היא סיגמא חיבורית, אזי קיימת מידה $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ כך שמתקיים

$$\mu\mid_{\Sigma_0}=\mu_0$$

מכאן ניתן להגדיר את מידת לבג Leb על ידי הגדרת המידה על האלגברה של איחודים זרים סופיים של קטעים בתוך $\mathbb{R}$. על האלגברה נגדיר

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right)=\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$$

עבור $-\infty\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\dots\le\infty$.

1.3 תזכורת לתכונות בסיסיות של מידות

יהי (S,Σ,μ) מרחב מידה.

1. תת חיבוריות: $\mu(A\cup B)\le\mu(A)+\mu(B)$ לכל $A,B\in\Sigma$. באינדוקציה לכל $A_1,\dots,A_n\in\Sigma$ מתקיים $\mu\left(\bigcup A_i\right)\le\sum\mu(A_i)$.
2. אם $\mu(S)<\infty$, אזי

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$

3. אם המידה סופית, מתקיימת נוסחת ההכלה וההפרדה:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)-\sum_{i,j=1}^{n}\mu(A_i\cap A_j)+\dots$$

1.3.1 תכונות מונוטוניות

יהי (S,Σ,μ) מרחב מידה.

1. אם $(A_n)\subseteq\Sigma$ ועולה אל A (מסמנים $A_n\uparrow A$), כלומר $A_n\subseteq A_{n+1}$ וכן $A=\bigcup A_n$, אזי

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

וכן $\mu(A_n)$ סדרה מונוטונית עולה.

2. אם $(B_n)\subseteq\Sigma$ ויורדת אל B (מסמנים $B_n\downarrow B$), כלומר $B_{n+1}\subseteq B_n$ וכן $B=\bigcap B_n$, אזי אם $\mu(B_n)<\infty$ עבור n כלשהו, אזי

$$\mu(B)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$$

וכן $\mu(B_n)$ סדרה מונוטונית יורדת. התנאי על סופיות נחוץ -

$$\mu((n,\infty))=\infty$$
$$\mu\left(\bigcap(n,\infty)\right)=\mu(\emptyset)=0$$

3. אם $(A_n)\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup A_n$ זניחה.

2 מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. Ω קרא מרחב מדגם. $\omega\in\Omega$ נקראת תוצאה. $A\in\mathcal{F}$ נקראת מאורע.

2.1 ניסויים

2.1.1 אינטואיציה לניסוי

בכל פעם שמתבצע הניסוי, נבחרת תוצאה $\omega \in \Omega$ והיא תוצאת הניסוי. כעת, כל המאורעות $A \in \mathcal{F}$ שמקיימים $\omega \in A$ קרו, וכל אלה שמקיימים $\omega \notin A$ לא קרו. ההסתברות כי ω נבחרה בתוך מאורע A מסויים היא $\mathbb{P}(A)$.

2.1.2 מידול ניסוי

מהם $(\Omega, \mathcal{F})$ עבור תיאור ניסוי נתון?

1. הטלת מטבע פעמיים: $\Omega = \{h,t\}^2$, $\mathcal{F} = P(\Omega)$.
2. הטלת מטבע אינסוף פעמים: $\Omega = \{h,t\}^{\mathbb{N}} = \{h,t\}^{\infty}$. מה היא $\mathcal{F}$? לא $P(\Omega)$, כי זה יותר מדי, במובן מסויים. השאלה שצריכה להנחות אותנו היא מה הם הדברים שצריכה להיות להם הסתברות? נרצה למשל כי

$$A_n = \{\text{nth throw was tails}\} = \{w \in \Omega \mid \omega_n = t\}$$

תהיה מדידה, כי היינו רוצים שההסתברות שלה תהיה $\frac{1}{2}$. נגדיר $\mathcal{F} = \sigma\left(\{A_n\}_{n\geq 1}\right)$ וזו סיגמא אלגברה טבעית לבעיה (זו סיגמא אלגברת בורל של טופולוגיית המכפלה על $\{h,t\}^{\mathbb{N}}$). כל המאורעות שניתקל בהם יהיו בתוך $\mathcal{F}$. למשל

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{(\omega_n = t)} = \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{F}$$

3. בוחרים מספר אחיד בין 0 לבין 1. $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$.

2.2 גבולות של סדרת מאורעות

עבור סדרת ממשיים $(a_n)_{n\geq 1}$, נזכר כי

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$

הגדרה 2.1 עבור סדרת מאורעות $(A_n)_{n\geq 1}$, נגדיר

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

וזהו גם כן מאורע. מסמנים גם

$$\{A_n \text{ infinitel often (i.o.)}\} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid |\{n \mid \omega \in A_n\}| = \infty\}$$

הגדרה 2.2 עבור סדרת מאורעות $(A_n)_{n\geq 1}$, נגדיר

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$$

מסמנים גם

$$\{A_n \text{ eventually (ev)}\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \forall k \geq n \;\; \omega \in A_k\} = \{\omega \mid |\{n \mid \omega \notin A_n\}| < \infty\}$$

תרגיל מתקיים

$$(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$$

תרגיל יהיו (A_n) מאורעות, ונסמן

$$1_{A_n} : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$1_{A_n}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A_n \\ 1 & \omega \in A_n \end{cases}$$

אזי

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}$$

וכן אותו דבר מתקיים עבור $\limsup$.

2.2.1 הסתברויות של גבולות (למות פטו)

משפט 2.3 (למת פטו הפוכה ־ במרחב מידה סופי) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $(A_n) \subseteq \mathcal{F}$. אזי

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{decreasing}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{\geq \sup \mathbb{P}(A_k)}\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right)$$

■

תרגיל יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהיו $(A_n)\subseteq\mathcal{F}$. אזי

$$\mathbb{P}\left(\liminf A_n\right)\leq\liminf\mathbb{P}\left(A_n\right)$$

משפט 2.4 (למת בורל קנטלי הראשונה) יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $(A_n)\subseteq\mathcal{F}$.
נניח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)<\infty$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\limsup A_n\right)=0$$