Wojciech Samotij (Wojtek / וויטק)

26/10/14

שיטות הסתברותיות בקומבינטוריקה

W1D1

השיטה ההסתברותית - דרך חשיבה על קומבינטוריקה.

נרצה לבנות אובייקט מתמטי שמקיים תכונות מסוימות ע"י הגרלה מתוך קבוצת אובייקטים. אם ה' >0 חייב להתקיים כזה.

מגוון שיטות בדגש על דוגמאות - לא משפטים מתמטיים מורכבים.

נדגים עם מספרי <u>רמזי</u>: $R(k,l)$ = n המינימלי כך שכל צביעה של קשתות K_n ב-2 צבעים יש עותק בצבע 1 של K_k או עותק בצבע 2 של K_l.

זה מספר סופי לכל k,l ו-Erdős-Szekeres הוכיחו $R(k,l)\le\binom{k+l-2}{k-1}$, ולכן $R(k,k)\le\binom{2k-2}{k-1}=\Theta\left(\frac{2^{2k}}{\sqrt{k}}\right)$. נרצה גם לחסום מלמטה. ניסיון פשוט: $R(k,k)\ge(k-1)^2+1$ $\left(K_{k-1}\times K_{k-1}\right)$ אדום כחול אדום. יש גם חסם $\Omega(k^3)$ וחסם $\ge k^{c\frac{\log k}{\log\log k}}$ עבור $c>0$ כלשהו.

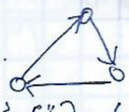
בעיה פתוחה: להראות גרפים לפיהם $R(k,k)\ge(1+\varepsilon)^k$. אבל לא קשה להוכיח <u>קיום</u>:

(ארדש) $R(k,k)\ge n$ כאשר $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$. לכן $R(k,k)\ge 2^{k/2}$

נצבע את K_n אקראית בסיכוי $1/2$ לכל צבע באופן ב"ת. הסיכוי ש-k קדקודים k יצרו קליקה מונוכרומטית $2^{1-\binom{k}{2}}$ ולפי חסם האיחוד $\le\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$?

דוגמה נוספת: תכונה של גרפי טורניר

נגדיר תכונה S_k על גרף טורניר (התחרות) - לכל k איברים ב-V ($|A|=k$) איבר $v\notin A$ שמנצח את כולם. S_1 -



משפט של ארדש - לכל k יש גרף שמקיים S_k - אם $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}<1$ אז קיים גרף על n קדקודים שמקיים S_k. נבחר באקראי. אז הסיכוי שקב' מסוימת $|A|=k$ של קדקודים שאף אחד לא מנצח $(1-2^{-k})^{n-k}$ ולפי איחוד $\mathbb{P}\le\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}<1$

$$\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}\le\left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-2^{-k}(n-k)}=e^{k\log\frac{en}{k}-2^{-k}(n-k)}<1$$

$$\left[n\approx k^2 2^k(\log 2+\varepsilon)\right]$$

2-צביעות היפר-גרפים:

$m(n)$ - m המינימלי כך שיש היפרגרף n-אחיד שאינו 2-צביע בן m קשתות.

למשל $m(2)=3$. כאן נוכל להשיג חסמים ב-2 הכיוונים בשיטה ההסתברותית.

בחסם התחתון נבנה צביעה ובעליון - (היפר)גרף.

משפט של ארדש: $m(n)\ge 2^{n-1}$. יהי H גרף n-אחיד בן m צלעות על V.
נקבע לכל v צבע באופן ב"ת בסיכוי $\frac{1}{2}$. הסיכוי שצלע
תפר את הצביעה הוא 2^{1-n}. ההסתברות שאין אף הפרה
הוא $1-m2^{1-n}$ לכל הפחות לפי חסם האיחוד. ו- $m<2^{n-1}$
זה מספר חיובי, ולכן ההיפר-גרף המתקבל 2-צביע.

נחסום גם מלמעלה את $m(n)$: $m(n)\le(1+o(1))\frac{e\log 2}{4}n^2 2^n$. נקבע V להיפר-גרף מגודל
v שנבחר מאוחר יותר כדי לא להפחיד סטודנטים מסכנים. נבחר
ת"ת קבוצה מגודל n ונוסיף לקשתות ההיפרגרף עד שיש לנו m
קשתות. נקבע גם $\chi: V\to\{0,1\}$. הסיכוי שקשת אקראית היא מונוכרומטית $\frac{\binom{|\chi^{-1}(1)|}{n}+\binom{|\chi^{-1}(0)|}{n}}{\binom{v}{n}}$
וזה מתמזער כש- $\chi^{-1}(1)$, $\chi^{-1}(0)$ בגודל שווה –
$p=\frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}}$. נסמן ב- A_χ את המאורע "χ צביעה תקינה של
H". אז

$$\mathbb{P}(A_\chi)=\mathbb{P}(\text{כל הקשתות תקינות})\le\left[1-\frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}}\right]^m$$

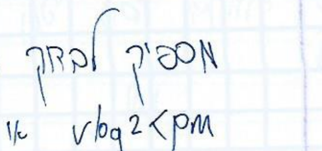
$$\mathbb{P}(H \text{ is 2-col})\le 2^v\left[1-\frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}}\right]^{m}<1 \quad (?)$$

מספיק לבדוק מתי (?) מתקיים. $2^v(1-p)^m\le e^{v\log 2-pm}<1$
$v\log 2<pm$ או $m\gg\frac{v\log 2}{p}$. נמזער לפי v?
$v\cdot\frac{\binom{v}{n}}{2\binom{v/2}{n}}\log 2=2^n\Theta\left(\frac{n^2}{v^2}\right)$ כאשר $v\ge n^{3/2}$, ונקבל $\frac{v\log 2\cdot 2^n e^{\frac{n^2}{2v}-O(1)}}{2}$
שמתמזער ב- $v=\frac{n^2}{2}$ ונקבל $\frac{n^2}{4}\log 2\cdot 2^n\cdot e^{1-o(1)}$

קבוצות בלי סכום

קבוצה (ב- $\mathbb{Z}$) נקראת בלי סכום אם $a_1+a_2\notin A$.
משפט: ל- B תת-קבוצה בלי סכום מגודל $\frac{|B|}{3}$. יש קבוצות שעבורן
נקבל $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ (למשל $B=\{1..n\}$). $\frac{1}{3}+o(1)$ הכי טוב שאפשר
(משפט משנה שעברה).

נניח $B=\{b_1...b_n\}$ וניקח p ראשוני $3k+2 > 2\max_{1\le i\le n}|b_i|$ ונתבונן ב- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$



C is sum free
$C+C=C^c$

$\frac{|C|}{p-1}=\frac{k+1}{3k+1}>\frac{1}{3}$. נבחר $x\in\{1..p-1\}$
אחיד ו- $A=\{b\in B: bx\in C\}$. A בלי סכום
נראה שיש A כזו עם לפחות $\frac{1}{3}$ מ- B

למה? כי ~~הסכום גדלים של C ב-A-ים מסדר גודל של~~

$$E(|A|)=\sum_{b\in B}\mathbb{P}(b\in A)=|B|\cdot\frac{|C|}{p-1}=|B|(1/3+o(1))$$

עוד דוגמה - תתי קבוצות זרות

$F\subseteq P([n])$ ו- $d(F)=|\{\{A,A'\}\subseteq F : A\cap A'=\emptyset\}|$. כמה גדול יכול להיות $d(|F|)$ אם $|F|=m$? למשל, כמה נוכל להגדיל את m כך ש-$d(F)=\Omega(m^2)$?

אם ניקח F ככל תתי הקבוצות של החצי הראשון וכל אלו של השני, $d(F)\approx\frac{m^2}{4}$, אבל $m=\Theta(2^{n/2})$. האם אפשר $2^{(\frac{1}{2}+\delta)n}$? מסתבר שלא.

משפט של אלון ופרנקל - $|F|=2^{(\frac{1}{2}+\delta)n}$ אז $d(F)<m^{2-\delta^2/2}$. (*)

נניח את שלילת (*) ונוכיח שקיימים $A_1,\dots,A_t$ ב-F שאיחודם $<\frac{n}{2}$ וזר ליותר מ-$2^{n/2}$ קבוצות אחרות. נבחר $A_1\dots A_t$ אקראיות באופן אחיד וב"ת ב-F. $\mathbb{P}(|A_1\cup\dots\cup A_t|\le\frac{n}{2})\le\sum_{|S|=n/2}\prod\mathbb{P}(A_i\subseteq S)$, זה לכל היותר $\left(2^n\frac{2^{n/2}}{m}\right)^t\le 2^{n(1-t\delta)}$ שהופך קטן ל-$t>\frac{1}{\delta}$. $v(A)=\{B\in F\mid B\cap A=\emptyset\}$, $\sum v(A)=2d(F)\ge 2m^{2-\delta^2/2}$ לפי למת לחיצות הידיים. $Y=|\{B\in F\mid B\cap A_i=\emptyset\}|$. מספיק להראות $\mathbb{P}(Y\ge 2^{n/2})$ גדול מ-$2^{n(1-t\delta)}$.

נחשב $\mathbb{E}(Y)$. כ $\sum_{B\in F}\mathbb{P}(B\cap A_0=B\cap A_1=\dots=\emptyset)=\sum_{B\in F}[\mathbb{P}(B\cap A)^t]=\sum\left(\frac{v(B)}{m}\right)^t=\frac{1}{m^t}\cdot m\frac{\sum v(B)^t}{m}\ge$

$\frac{m}{m^t}\left[\frac{2d(F)}{m}\right]^t\ge 2^t m^{1-\frac{\delta^2}{2}}$ of course, $Y\le m$ so $\mathbb{E}Y\le m\cdot\mathbb{P}(Y>m^{1-\frac{\delta^2}{2}t})+m^{1-\frac{\delta^2}{2}t}$

And so $\mathbb{P}(Y\ge m^{1-\frac{\delta^2}{2}t})\ge m^{-\frac{\delta^2}{2}t}(2^t-1)$. let $t=\lceil 1+\frac{1}{\delta}\rceil$ so $m^{1-\frac{\delta^2}{2}t}$ is more then $2^{n/2}$ and also $m^{-\frac{\delta^2}{2}t}(2^t-1)>2^{n(1-t\delta)}$ as needed.