משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ארזים ©

1 ביוני 2017

משפט 0.1 במערכת $Py''+Qy'+Ry=0$, אם $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$ אנליטיות ברדיוס ρ סביב x_0 אזי הפתרון y אנליטי סביב x_0 ברדיוס לפחות ρ.

תרגיל פותרים את

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+6y=0$$

ראשית נדון בדריוס ההתכנסות המובטח של y.

$$\begin{aligned}\frac{Q}{P}&=-\frac{2x}{(1+x)(1-x)}\\ \frac{R}{P}&=\frac{6}{(1-x)(1+x)}\end{aligned}$$

שתי אלה מתכנסות ברדיוס $\rho=1$ סביב 0, ולכן גם y. כעת נפתור:

$$\begin{aligned}6y&=6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}6a_nx^n\\ -2xy'&=-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n\\ y''&=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}x^n\\ -x^2y''&=-\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^n\end{aligned}$$

לכן המשוואה שלנו היא למעשה

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}6a_nx^n=0$$

נקבל

$$\begin{aligned}2a_2+6a_0&=0\\ a_2&=-3a_0\\ 6a_3-2a_1+6a_1&=0\\ a_3&=-\frac{2a_1}{3}\end{aligned}$$

כעת, לכל סדר אחר, נקבל

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(-n(n-1)-2n+6)a_n=0$$
$$a_{n+2}=\frac{(n+3)(n-2)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

נשים לב שכל המקדמים הזוגיים החל מהרביעי מתאפסים בהכרח, ולכן

$$y=1-3x^2$$

פתרון פולינומיאלי. עבור הפתרון הלא פולינומי, נבדוק את הרדיוס של טור החזקות. נשתמש במבחן המנה (בלי הגבלת הכלליות נבחר $a_0=0$, כי זה לא ישנה את רדיוס ההתכנסות ־ זה רק מוסיף שני איברים פולינומיים). הפתרון הוא

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

ונחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(2n-1)}{(2n+2)(2n+3)}x^2$$

נרצה לקבל משהו שקטן מאחד, ולכן צריך $|x|<1$.

1 מערכות של משוואות לינאריות

תרגיל ראינו נוסחת אבל למשוואות מסדר n ולמערכות מסדר n. נראה שהן זהות. עבור מערכת, בהנתן n פתרונות בלתי תלויים מגדירים $W=\det(x_1,\dots,x_n)$. עבור משוואה, מעבירים למערכת

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y'$$
$$\frac{\partial y'}{\partial x}=y''$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}=-p_{n-1}y^{(n-1)}-\dots-p_0y$$

בהנתן n פתרונות בלתי תלויים, הגדרנו

$$W=\left(y_i^{(j)}\right)_{i,j}$$

אבל בניסוח כמערכת נקבל זהות של שתי ההגדרות. גם נוסחאות אבל מזדהות אם מציבים.