משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

18 במאי 2017

1 שיטות למציאת פתרונות פרטיים

1.1 וריאציית הפרמטרים

פותרים את

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

השלבים: פותרים את המערכת ההומוגנית, ומקבלים כי $y_h \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$. מנחשים פתרון מהצורה $y_p = c_1(x)\,u_1(x) + c_2(x)\,u_2(x)$. אחרי הרבה עבודה מקבלים

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

ומכלל קרמר:

$$c_1' = -\frac{u_2 g}{W}$$
$$c_2' = \frac{u_2 g}{W}$$

דוגמא נפתור את $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. ניקח $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$. אזי $W = 1$, ואז

$$c_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$c_1 = -\int \tan x = \ln|\cos x|$$
$$c_2' = \frac{\cos x}{\cos x}$$
$$c_2 = \int 1 = x$$

בסך הכל נקבל

$$y_p = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$

והפתרון הכללי הוא

$$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

כאשר A, B נקבעים לפי תנאי התחלה.

1.2 פונקציית גרין

פותרים כעת שוב את

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

למדנו שאם u_1, u_2 פתרונות הומוגניים של המערכת ובלתי תלויים, מגדירים

$$G(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2, x)}$$

ומקבלים

$$y_p = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

בכיתה ראינו שעבור $y'' + y = 0$ מתקיים $G(x,t) = g(x-t)$, וזה תמיד המצב עבור מקדמים קבועים (p,q). במקרה זה $g(x-t) = \sin(x-t)$.

דוגמה נגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & o/w \end{cases}$$

נשים לב כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

וזאת לכל n. נפתור עבור $x > 1$ את המשוואה, עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

$$y_p^n(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} n\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = n\cos(x-t)\,\Big|_0^{\frac{1}{n}} =$$

$$= n\left(\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos x\right) = \frac{\cos(x) - \cos\left(x - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}$$

נקיח גבול כאשר $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} y_{p_n}(x) = \lim_{n\to\infty} -\frac{\cos(x) - \cos\left(x - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \sin x = g(x)$$

קיבלנו שוב את פונקציית גרין!

דוגמא נפתור את המשוואה:

$$\left(1+x^2\right)y''-2xy'+2y=\left(1+x^2\right)^2e^x$$

עם תנאי התחלה בנקודה 1. נתונים הפתרונות ההומוגניים $u_1(x)=x$, $u_2(x)=x^2-1$. נפתור באופן כללי על ידי פונקציית גרין.

$$G(x,t)=\frac{\begin{vmatrix}t & t^2-1\\ x & x^2-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}t & t^2-1\\ 1 & 2t\end{vmatrix}}=\frac{t\left(x^2-1\right)-x\left(t^2-1\right)}{2t^2-t^2+1}=\frac{t\left(x^2-1\right)-x\left(t^2-1\right)}{t^2+1}$$

ואז

$$y_p(x)=\int_1^x G(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{t\left(x^2-1\right)-x\left(t^2-1\right)}{t^2+1}\frac{\left(1+t^2\right)^2e^t}{\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\left(x^2-1\right)\int_1^x e^t t\,\mathrm{d}t-x\int_1^x e^t\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t=[integration\ by\ parts]\ldots$$

2 איך פותרים משוואה מסדר 2 שאינה לינארית?

עד עכשיו פתרנו <u>רק</u> משוואות לינאריות.

חימום עבור המקרה $y''=f(x,y')$. נציב $v=y'$, ונקבל $v'=f(x,v)$ - משוואה מסדר ראשון!

דוגמא $y''=x^2y'^2$. נציב $v=y'$, ונקבל $v'=x^2v^2$ ומכאן

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=x^2\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{v}=\frac{x^3}{3}+c$$
$$y'=-\frac{1}{\frac{x^3}{3}+c}$$

וזה ייפתר על ידי אינטגרציה.

אוטונומי המקרה הזה הוא $y''=f(y,y')$. כמו קודם, נציב $v=y'$. נקבל

$$v'=f(y,v)$$

נעבור להסכלות על דברים כפונקציות במשתנה y (הגיוני, כי הכל תלוי רק בערך y).

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v$$

דוגמא נפתור את

$$
\begin{aligned}
yy'' + y'^2 &= 0 \\
y'' &= -\frac{y'^2}{y}
\end{aligned}
$$

נציב $v = y'$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{v^2}{y} \\
v\left(y\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} &= -\frac{v\left(y\right)^2}{y} \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} &= -\frac{v\left(y\right)}{y} \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{1}{y}\mathrm{d}y \\
\ln\left|v\right| &= -\ln\left|y\right| + c \\
v &= \frac{A}{y}
\end{aligned}
$$

כעת, נקבל

$$y' = \frac{A}{y}$$

וזו עוד משוואה מסדר ראשון שעלינו נפתור.

$$\frac{y^2}{2} = c_1x + c_2$$

רמאות נשים לב:

$$
\begin{aligned}
yy'' + y'^2 &= \left(yy'\right)' = 0 \\
yy' &= C
\end{aligned}
$$

וזה הדבר השני שפתרנו!