משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

4 במאי 2017

1 משוואות מסדר גבוה

תזכורת נתונה משוואה מסדר n:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ראינו גם ניסוח שקול כמערכת מסדר n של משוואות מסדר ראשון:

$$\begin{aligned} y' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ y^{(n)} = z_{n-1}' &= f\left(x, y, z_1, \ldots, z_{n-2}\right) \end{aligned}$$

ראינו כי עבור תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} y\left(x_0\right) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

יש קיום ויחידות באותם תנאים שיש בסדר ראשון - זאת אומרת אם f ליפשיץ במשתנים $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

דוגמא לחימום: נפתור את:

$$\begin{aligned} y'' + e^{x^3} y' + \frac{\sin\left(x^3\right)}{e^{4x}} y &= 0 \\ y\left(4\right) &= 0 \\ y'\left(4\right) &= 0 \end{aligned}$$

פתרון נשים לב שיש פתרון מהצורה $y \equiv 0$. זהו הפתרון היחיד, כי f, בהצגה $y'' = f\left(x, y, y'\right)$, היא ליפשיץ במשתנים y, y'.

1.1 משוואות לינאריות (הומוגניות) מסדר שני

מתבוננים במשוואה

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$$

משפט 1.1 קבוצת כל הפתרונות למשוואה זו היא מרחב ווקטורי ממימד 2. בהינתן שני פתרונות y_1,y_2 של המשוואה, נגדיר

$$W(x;y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$$

ואז מתקיים

$$W(x;y_1,y_2)=W(x_0;y_1,y_2)\,e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}s}$$

לכן W מתאפס בנקודה אחת אם ורק אם הוא מתאפס בכל תחום ההגדרה של p,y_1,y_2. אם הפתרונות תלויים לינארית, אזי $W\equiv 0$.

עבור משוואה לינארית מסדר n כללי,

$$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}p_i(x)\,y^{(i)}=0$$

כאשר $y_1,\ldots,y_n$ פתרונות, מגדירים

$$W=\left|\left(y_j^{(i)}\right)_{i,j}\right|$$

בתרגיל הבית נוכיח את הנוסחה שלעיל עבור n כללי.

דוגמא נתונות $u_1=x^2,u_2=x^3$. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W(x;u_1,u_2)=\begin{vmatrix}x^2 & x^3\\ 2x & 3x^2\end{vmatrix}=3x^4-2x^4=x^4$$

נקבל שהוא מתאפס לפעמים. זו לא סתירה - פשוט נובע כי u_1,u_2 לא יכולים להיות שני פתרונות של משוואה לינארית מסדר שני בתחום הכולל את 0.

הוורונסקיאן הוא כלי (עבור משוואות דיפרנציאליות בלבד) לבדוק האם n פתרונות נתונים פורשים את מרחב הפתרונות.

"עכשיו נעשה דוגמה, שהיא חביבה עליי" - המתרגל

1.1.1 משוואת לז'נדר

מסדר n:

$$\left(1-x^{2}\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$$

בתחום $x\in\left[-1,1\right]$.

פולקלור נרצה להעריך את

$$\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

אם f חלקה, מספיק להעריך על האפסים של פולינומי לז'נדר (פתרונות פולינומיאליים למשוואת לז'נדר). פולינום מסדר n נותן קירוב מסדר n.

בחזרה למשוואה - נעבוד עם סדר ראשון:

$$\left(1-x^{2}\right)y''-2xy'+2y=0$$

נחפש פתרון שהוא מונום x^{k}: על ידי הצבה נקבל משוואה על k, ונוכל לפתור אותה ולקבל $k=1$, כלומר $y=x$ פולינום. נרצה למצוא פתרון נוסף (קיים, כי מימד מרחב הפתרונות הוא 2). נחפש $y_{2}\left(x\right)=y_{1}\left(x\right)v\left(x\right)$. על ידי הצבות וייסורים מקבלים

$$v'\left(x\right)=\frac{1}{y_{1}^{2}}\exp\left(-\int\limits^{x}p\left(s\right)\,\mathrm{d}s\right)$$

במקרה הפרטי שלנו, $p\left(x\right)=-\frac{2x}{1-x^{2}}$ כי הצורה הקנונית היא $y''+py'+qy=0$. אם כן:

$$\int\frac{-2x}{1-x^{2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\left|t\right|=\ln\left(1-x^{2}\right)$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}v'\left(x\right) & =\frac{1}{x^{2}}e^{-\ln\left(1-x^{2}\right)}=\frac{1}{x^{2}\left(1-x^{2}\right)}\\
v\left(x\right) & =\int\limits^{x}\frac{1}{t^{2}\left(1-t^{2}\right)}\,\mathrm{d}t=\int\limits^{x}\frac{1}{t^{2}}+\frac{1}{1-t^{2}}\,\mathrm{d}t=\\
 & =-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

בסך הכל

$$y_2(x) = -1 + \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

זה נקרא פולינום לז'נדר מהסוג השני מסדר ראשון. נשים לב שהפתרון $y_2(x)$ מוגדר בקטע $(-1,1)$, בעוד $y_1(x)$ מוגדר בכל $[-1,1]$. לכן בנקודות הקצה המקדמים הלא רציפים לא דווקא משנים. זה נובע מהתכנסות ואי התכנסות של אינטגרל של טור חזקות בקצוות - עוד בהמשך.

כעת, נתונה משוואה מסדר שני

$$y'' + py' + qy = 0$$

ונתון פתרון $y_1(x)$ נראה שאפשר להשתמש בנוסחת אבל כדי למצוא פתרון y_2 שאינו תלוי לינארית באותו y_1. אם $W(x_0) \neq 0$ אזי לכל x בתחום $W(x) \neq 0$. עבור y_2 כלשהו מתקיים

$$W(x; y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

אבל, מנוסחת אבל, מתקיים גם

$$W(x; y_1, y_2) = W(x_0)\, e^{-\int^x p(s)\,\mathrm{d}s}$$

לכן באופן כללי,

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = W(x_0)\, e^{-\int^x p(s)\,\mathrm{d}s}$$

הפונקציה $e^{-\int^x p(s)\,\mathrm{d}s}$ היא ידועה. אפשר לבחור את $W(x_0)$ על ידי שנבחר שני זוגות של תנאי התחלה עבורם $W(x_0) \neq 0$.

בדוגמה של לז'נדר מסדר ראשון, $y_1 = x$, $p = -\frac{2x}{1-x^2}$. נשים לב כי

$$y_1(0) = 0$$
$$y_1'(0) = 1$$

נבחר לכן

$$y_2(0) = 1$$
$$y_2'(0) = 0$$

לכן $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, וכן

$$e^{-\int^x p(s)\,\mathrm{d}s} = \frac{1}{1-x^2}$$

כמו שחישבנו קודם. קיבלנו

$$xy_2' - y_2 = \frac{1}{1-x^2}$$

זו משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר ראשון עבור y_2. פותרים עם גורם אינטגרציה.