משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

27 באפריל 2017

1 שיטות גרפיות

דוגמא $y'=\sin y$. משוואה זו היא אוטונומית ־ כלומר לא תלוייה במשתנה t במפורש. היא ניתנת להפרדה ומקבלים

$$t=\ln\left|\frac{\csc\left(y_0\right)+\cot\left(y_0\right)}{\csc\left(y\right)+\cot\left(y\right)}\right|$$

1.1 ישר הפאזה

נזכר בתרגיל שעשינו בעבר ־ אם $y\left(t\right)$ פתרון, אזי לכל t_0 גם $y\left(t-t_0\right)$ פתרון. לכן מספיק לנו לדעת את הקשר בין y' לבין y, ולכן מציירים את הקשר הזה כגרף ־ ישר הפאזה. נניח שנתון תנאי התחלה $y\left(t_0\right)=5$ (בדוגמא הקודמת עם $\sin$). לפי ישר הפאזה, בנקודה הזו אנחנו נלך שמאלה. לא נוכל לעבור את הנקודה $y=\pi$, כי משמאלה הולכים ימינה. אם תנאי ההתחלה שלנו היה $y\left(t_0\right)=\pi$, לעומת זאת, נפתור לרגע כמו שצריך ־ אנחנו יודעים שיש פתרון סטציונרי $y=\pi$, וממשפט הקיום והיחידות של פיקרד ידוע שזה היחיד שעובר בנקודה $y=\pi$ (כי המשוואה אוטונומית). לכן, כל הנקודות בהן $\dot{y}=\sin y$ מתאפס הן נקודות שבת ־ קרי, קיים פתרון סטציונרי קבוע עליהן.

זה נותן לנו לחשוב על משוואה דיפרנציאלית רגילה כמערכת שממפה ערכי y לערכי y עתידיים.

ננסה להבין את ההבדל בין נקודות שבת יציבות ולא יציבות. נחשוב על קערה, ונניח בה כדור. אם נניח אותו בסביבת התחתית של הקערה, הוא יישאר שם ־ כלומר תחתית הקערה היא נקודת שבת יציבה. אם נהפוך את הקערה ונניח את הכדור בראשה, זו תהיה נקודת שבת ־ אבל אם נזיז אותו במעט הוא יברח מהסביבה הזו. לכן זו נקודת שבת לא יציבה.

במשוואה המקורית שלנו, $y=\pi$ יציבה ־ בסביבתה נעים בחזרה אליה. לעומת זאת, $y=0$ לא יציבה ־ תנועה קטנה תעיף אותנו לכיוון הנקודות $\pm\pi$.

נעבור להתבונן במשוואה פרמטרית:

$$y'\left(x\right)=r\ln y+y-1$$

כאשר $r\in\mathbb{R}$ פרמטר. כחימום נתבונן במקרה $r=1$ ־ הכל מוגדר רק עבור $y>0$. נקודת השבת היא $y=1$, והיא לא יציבה.

נזכר כי יציבות הנקודה $y^* = 1$ נקבעת לפי

$$\frac{\partial f}{\partial y} |_{y^*}= \frac{r}{y} + 1$$

אם $r < -1$ זה גודל שלילי, ואז y^* יציבה. אם $r > -1$, זה גודל חיובי, ולכן y^* לא יציבה. עבור $r = -2$, למשל, נקבל נקודה יציבה עבור $y^* = 1$, ונקודה לא יציבה שתלויה בנקודה r שנסמנה $y^*(r)$. עבור $r = -1$ הנקודות הללו מתאחדות למעשה - לנקודה אחת יציבה למחצה $y^* = 1$. זה נקרא נקודת הסתעפות - וספציפית סוג ההסתעפות Trans-critical bifurcation. מציירים את דיאגרמת ההסתעפויות, שבה מתארים את y כפונקציה של r, ומציירים בה את התקדמות נקודות השבת. נראה בה, למשל, שנקודת השבת $y^* = 1$ יציבה עד $r = -1$, ושם היא נהיית לא יציבה, וכך היא ממשיכה. זאת למרות שהמערכת "נראית" רציפה בפרמטר r.

בשיעור ראינו סוג אחר של הסתעפות - saddle node bifurcation.

דוגמא לכל $r \in \mathbb{R}$ נתונה המשוואה

$$y'(x) = r - y - e^{-y}$$

כאשר r מאוד גדול, נוכל לצייר את $r - y$ ואת e^{-y}. נקבל שתי נקודות חיתוך, שהן נקודות שבת שנסמנן y^*, y^{**}. לפי הציור הזה נוכל גם לדעת את ערך y', כלומר יציבות - נקבל כי y^* לא יציבה, y^{**} כן (y^* היא השמאלית מבין השתיים). לעומת זאת, עבור r קטן מאוד, $r - y$ תעבור לחלוטין מתחת לגורם השני - ולכן אין נקודות שבת. מכאן, ההסתעפות היא כאשר $r - y$ משיקה לגורם השני. תרגיל (שאפשר לעשות גם בתיכון) הוא למצוא את r שמקיים את זה. דיאגרמת הביפורקציה תראה נקודה לא יציבה ונקודה יציבה, שמתקרבות עד שהן נפגשות, ואז נעלמות - וזה בדיוק saddle node bifurcation.

ביפורקציות כאלה הן אוניברסליות, במובן שקרוב לנקודת ההסתעפות יש שינוי משתנים שמעביר את המשוואה לצורה $y' = r - y^2$.