משוואות דיפרנציאליות רגילות

© ארזים

30 במרץ 2017

1 משוואות מדוייקות

דוגמא למשוואה מדוייקת:

$$\underbrace{(y\cos x + 2xe^y)}_{M(x,y)} + \underbrace{\left(\sin x + x^2e^y + 2\right)}_{N(x,y)} y' = 0$$

כדי לוודא שהמשוואה מדוייקת צריך לוודא שמתקיים $M_y = N_x$. נבדוק:

$$M_y = \cos x + 2xe^y$$
$$N_x = \cos x + 2xe^y$$

לכן קיים פתרון $F(x,y) = c$, כאשר $F_x = M, F_y = N$. נחשב:

$$F(x,y) = \int M\,\mathrm{d}x = \int (y\cos x + 2xe^y)\,\mathrm{d}y = y\sin x + x^2e^y + g(y)$$

כעת נגזור לפי y ונשווה עם N:

$$\sin x + x^2e^y + 2 = N = F_y = \sin x + x^2e^y + g'(y)$$
$$g'(y) = 2$$
$$g(y) = 2c$$

בסך הכל הפתרון הוא

$$y\sin x + x^2e^y + 2y = c$$

דוגמא נתבונן במשוואה

$$y\mathrm{d}x + \left(2xy - e^{-2y}\right)\mathrm{d}y = 0$$

כאן

$$M_y = 1, N_x = 2y$$

ולכן המשוואה לא מדוייקת. למדנו שיש גורם אינטגרציה התלוי רק במשתנה x אם $\frac{M_y - N_x}{N}$ היא פונקציה רק של x. נבדוק:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-2y}{2xy - e^{-2y}} \neq f(x)$$

נבדוק את הכיוון ההפוך (פונקציה של y):

$$-\left(\frac{M_y - N_x}{M}\right) = \frac{-1+2y}{y} = h(y)$$

לכן גורם האינטגרציה שלנו הוא

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2y-1}{y}\,\mathrm{d}y} = \frac{e^{2y}}{y}$$

נכפיל את המשוואה המקורית בזה:

$$e^{2y}\mathrm{d}x + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$$

כעת ניתן לוודא שהמשוואה אכן מדוייקת, וכן:

"פתרו בהנאה בסוף השבוע" ־המתרגל

דוגמא נמצא מתי למשוואה

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

יש גורם אינטגרציה שתלוי רק במכפלה xy. נכפיל את המשוואה ונדרוש שתהייה מדוייקת:

$$\mu M \mathrm{d}x + \mu N \mathrm{d}y = 0$$

כעת נשווה נגזרות:

$$\begin{aligned} x\mu' M + \mu M_y &= y\mu' N + \mu N_x \\ \frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} &= \frac{M_y - N_x}{yN - xM} \end{aligned}$$

לכן גורם אינטגרציה שכזה קיים אם אגף ימין הוא פונקציה של xy. במקרה זה נוכל לפתור ולגלות אותו.

2 משוואות הומוגניות

הגדרה 2.1 משוואה $y' = f(x,y)$ תקרא הומוגנית אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^l f(x,y)$, עבור l קבוע.

דוגמא וממנה נלמד את השיטה.

$$y' = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

אזי

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - 3\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 xy} = f(x,y)$$

כלומר זו משוואה הומוגנית. נציב משתנה חדש $v(x) = \frac{y}{x}$. אזי

$$\begin{aligned} y &= xv(x) \\ y' &= v(x) + xv'(x) \end{aligned}$$

נציב:

$$v + xv' = \frac{x^2 - 3x^2v^2}{2x^2v} = \frac{1-3v^2}{2v}$$

ננסה לפתור כמשוואה לינארית.

$$xv' = \frac{1-5v^2}{2v}$$

לא קיבלנו משוואה לינארית - אלא משוואה ניתנת להפרדה. כל משוואה הומוגנית תהפוך על ידי ההצבה הזו משוואה ניתנת להפרדה. אם כן:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2v}{1-5v^2}\mathrm{d}v$$

עושים אינטגרל, פותרים, ומציבים $y = xv$.

נחזור למשוואות מדוייקות.

טענה 2.2 נתטנה משוואה

$$0 = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

וקיים גורם אינטגרציה $\mu(x,y)$, וכן $F(x,y) = c$ פתרון. נראה כי $\mu_* = \mu F$ גם כן פתרון.

הוכחה: ידוע לנו כי

$$\mu M \mathrm{d}x + \mu N \mathrm{d}y = 0$$

מדוייקת. לכן

$$(M\mu)_y = (N\mu)_x$$

נבדוק כי

$$(M\mu F)_y = (N\mu F)_x$$

נבדוק:

$$\cancel{(M\mu)_y F} + (M\mu) F_y \stackrel{?}{=} \cancel{(N\mu)_x F} + N\mu F_x$$
$$M\mu F_y \stackrel{?}{=} N\mu F_x$$
$$\frac{M}{N} = \frac{F_x}{F_y}$$

וזה נתון לנו ־ כי F פתרון. $\blacksquare$