משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

23 במרץ 2017

1 משוואות דיפרנציאליות רגילות הניתנות להפרדה

תרגיל נתבונן במערכת הבאה:

$$\begin{aligned}(1+e^x)\,yy' &= e^x\\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned}(1+e^x)\,yy' &= e^x\\ (1+e^x)\,y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^x\\ y\mathrm{d}y &= \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

באופן פורמלי, מבצעים החלפת משתנים

$$\begin{aligned}yy' &= \frac{e^x}{1+e^x}\\ \int y(x)\,y'(x)\;\mathrm{d}x &= \int\frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\\ \frac{1}{2}y^2(x) &= \ln(1+e^x)+c\\ y(x) &= \sqrt{2\ln(1+e^x)+2c}\end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{2}\\ y(x) &= \sqrt{2\ln(1+e^x)+1}\end{aligned}$$

1.1 משפחות של מסילות/עקומות אורתוגונליות

תהיינה A, B קבוצות של מסילות. נאמר כי הן אורתוגונליות אם כל שתי מסילות $a \in A$, $b \in B$ נחתכות בזווית $\frac{\pi}{2}$ בכל נקודת חיתוך. באופן פורמלי, בכל נקודת חיתוך

$$a'b' = -1$$

תרגיל מצאו משפחת פונקציות שהן אורתוגונליות למשפחה $y = ax^2$.

פתרון נתחיל מלהבין איזו משוואה דיפרנציאלית רגילה מקיימת משפחת המסילות הנתונות לנו.

$$y' = 2ax$$

נרצה להיפטר מאותו פרמטר a.

$$\frac{y'}{2x} = \frac{y}{x^2}$$

מכאן נקבל

$$y' = \frac{2y}{x}$$

לכן, מתנאי האורתוגונליות, נסיק המסילות שאנו מחפשים יקיימו את המשוואה

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

נפתור זאת:

$$\begin{aligned} 2yy' &= -x \\ y^2 &= \frac{-x^2}{2} + c \\ \frac{y^2}{c} + \frac{x^2}{2c} &= 1 \end{aligned}$$

קיבלנו אליפסות עם צירים ראשיים $\left(\sqrt{2c}, \sqrt{c}\right)$.

תרגיל בעיית ערבוב: מיכל מכיל 20 קילוגרם מלח המומס במים בנפח 5000 ליטר מים. מזרימים למיכל חומץ המכיל 0.03 קילוגרם מלח לליטר, בקצב של 25 ליטר לדקה. התמיסה מעורבבת היטב, והמיכל מנוקז באותו קצב. כמה מלח נשאר במיכל אחרי 30 דקות?

פתרון נגדיר $y(t)$ להיות כמות המלח בקילוגרם אחרי t דקות. מתקיים $y(0)=20$, ונרצה לדעת מהו $y(30)$. המשוואה דיפרנציאלית שנמצאת כאן היא

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 0.03\cdot 25-\underbrace{\frac{y(t)}{5000}}_{concentration}\cdot 25\\
y'(t) &= 0.75-\frac{y(t)}{200}\\
y'(t)+\frac{1}{200}y(t) &= 0.75\\
\frac{y'}{150-y} &= \frac{1}{200}\\
-\ln|150-y| &= \frac{t}{200}+c
\end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה:

$$c=-\ln(130)$$

נציב חזרה:

$$y(t)=150-130e^{-\frac{t}{200}}$$

ואז

$$y(30)\approx 38.1$$

1.2 שימור אנרגיה במכניקה קלאסית

בהנתן מערכת משמרת אנרגיה, מתאים לה מספר קבוע E המתאר את האנרגיה במערכת:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)$$

נתעניין במשוואה הדיפרנציאלית

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(x)\right)}$$

1.2.1 אוסילטור הרמוני

$E>0$, $V\left(x\right)=kx^{2}$, $x\left(0\right)=0$. נציב אל תוך המשוואה:

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{1-\frac{k}{E}x^{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1-\frac{k}{E}x^{2}\right)}}=\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\left(\sqrt{\frac{k}{E}}x\right)^{2}}=t+c$$

נבצע החלפת משתנים:

$$s=\sqrt{\frac{k}{E}}x$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\frac{k}{E}}\mathrm{d}x$$

נציב:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{k}}\int\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^{2}}}=t+c$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}}\arccos\left(\sqrt{\frac{k}{E}}x\right)=t+c$$

נציב $x\left(0\right)=0$ ונקבל

$$\sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{\pi}{2}=c$$