משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 תורת פלוקה

יש לנו מערכת לינארית

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$$

כאשר $A(t)$ מחזורית עם זמן מחזור $T > 0$. ראינו שלכל פתרון יסודי $X(t)$ (מטריצה שעמודותיה פתרונות בלתי תלויים) קיימת מטריצה B עם

$$X(t+T) = X(t)\,B$$

הערה 1.1 אמנם לכל X יש B, אבל אם $X, \tilde{X}$ שתי מטריצות יסודיות, נקבל $B, \tilde{B}$ מתאימות שדומות אחת לשנייה.

ראינו שאם $\rho \in \mathbb{R}^+$ ערך עצמי של B אז קיים פתרון

$$x(t) = e^{\mu t} p(t)$$

באשר $\rho = e^{\mu T}$ וכן $p(t)$ מחזורית. אם $\rho < 0$ אזי נוכל לכתוב

$$x(t) = e^{\frac{i\pi t}{T}} e^{\mu t} p(t)$$

נדון כעת במקרה הכללי - $\rho \in \mathbb{C}$. נכתוב $\rho = \alpha + i\beta = e^{\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}}$. α, β נתונים ולכן נוכל למצוא את $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. הוכחנו בשיעור שיש

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho p(t) \\ x(t) &= e^{i\tilde{\beta} t} e^{\tilde{\alpha} t} p(t) \end{aligned}$$

טענה 1.2 B ממשית (נוכיח תיכף).

הוכחה: נניח שתנאי ההתחלה ממשי. ידוע לנו כי $X(0) \in M_n(\mathbb{R})$, ואז

$$\begin{aligned} X(T) &= X(0)\,B \\ B &= X^{-1}(0)\,X(T) \end{aligned}$$

המערכת ממשית, ולכן זו ממשית ־ הפתרון הוא ממשי. ■

מכאן נקבל שגם $\overline{\rho}$ ערך עצמי, ואז

$$\overline{\rho} = e^{\tilde{\alpha} - i\tilde{\beta}}$$

מקבלים שני פתרונות ־

$$x_1 = \cos\left(\tilde{\beta}t\right) e^{\tilde{\alpha}t} p\left(t\right)$$
$$x_2 = \sin\left(\tilde{\beta}t\right) e^{\tilde{\alpha}t} p\left(t\right)$$

דוגמא הוכיחו שלמשוואה

$$u'' - 2\sin^2 tu' + \sin\left(2t\right) u = 0$$

אין קבוצה יסודית של פתרונות מחזוריים.

פתרון נכתוב במערכת:

$$x' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\left(2t\right) & 2\sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = Ax$$

המערכת מחזורית עם מחזור $T = \pi$. יש פתרון מחזורי אם קיים ערך עצמי $1, -1$ פעמיים עבור B של קודם. הוכחנו בכיתה:

$$\det B = e^{\int_0^T \mathrm{Tr}(A)} = e^{\int_0^T 2\sin^2 t\, \mathrm{d}t} > 1$$

שכן $2\sin^2 t > 0$. לכן נקבל כי מכפלת הערכים העצמיים היא גדולה מאשר 1 ־ ולכן לא ייתכן ששניהם מתוך $\{1, -1\}$.

דוגמא נתבונן במערכת

$$x_1' = \left(1 + \frac{\cos t}{2 + \sin t}\right) x_1$$
$$x_2' = x_1 - x_2$$

נפתור את המערכת. המשוואה הראשונה ניתן להפרדה, ונקבל

$$x_1\left(t\right) = A\left(\sin t + 2\right) e^t$$

לכל $A \in \mathbb{R}$ קבוע. מהצבת x_1 נקבל משוואה לינארית עבור x_2, שהפתרון שלה

$$x_2 = 2A + ce^{-t} + \frac{A}{2}\left(\sin t - \cos t\right)$$

נחשב את B למטריצה יסודית כלשהי. המערכת היא

$$x' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\cos t}{2+\sin t} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

נחפש את $X(T)=X(2\pi)$ עבור זו שמקיימת $X(0)=I_2$. מהצבת תנאי ההתחלה הללו נקבל שני פתרונות:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sin t+2)e^{t} \\ 1-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}(\sin t-\cos t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

נציב ונקבל

$$X(2\pi)=\begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ \frac{5}{4}\left(1-e^{-2\pi}\right) & e^{-2\pi} \end{pmatrix}=X(0)B=B$$

נוודא את הנוסחה לדטרמיננטה:

$$\det(B)=1$$

וכן

$$\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Tr}A(t)\ \mathrm{d}t\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln(2+\sin t)\ |_0^{2\pi}=0$$

ואכן

$$\det B=e^{\int_0^{2\pi}\mathrm{Tr}(A)}$$