משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 התמרת לפלאס

טענה 1.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-cs}F\left(s\right)\right)=u_{c}\left(t\right)f\left(t-c\right)$$

כאשר

$$u_{c}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t<c\\1 & t\geq c\end{cases}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(u_{c}\left(t\right)f\left(t-c\right)\right) & =\int\limits_{0}^{\infty}u_{c}\left(t\right)f\left(t-c\right)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{c}^{\infty}f\left(t-c\right)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\\ & =\int\limits_{0}^{\infty}f\left(z\right)e^{-sz-sc}\,\mathrm{d}z=e^{-sc}\int\limits_{0}^{\infty}f\left(z\right)e^{-sz}\,\mathrm{d}z=e^{-sc}F\left(s\right)\end{aligned}$$

■

דוגמא נפתור משוואה עם טרנספורם לפלאס. נגדיר

$$g\left(t\right)=\begin{cases}1 & 0\leq t\leq\pi\\0 & \pi<t\end{cases}=1-u_{\pi}\left(t\right)$$

נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}y''+y'+\frac{5}{4}y & =g\left(t\right)=1-u_{\pi}\left(t\right)\\y'\left(0\right) & =0,y\left(0\right)=0\end{aligned}$$

נתמיר:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)+\frac{5}{4}Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$
$$Y(s)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

נכתוב כעת

$$H(s)=\frac{1}{s\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

נניח שהצלחנו להתמיר אותה אחורה, נסמן $\mathcal{L}^{-1}(H(s))=h(t)$. אזי

$$Y(s)=H(s)-e^{-\pi s}H(s)$$
$$y(t)=h(t)-u_\pi(t)\,h(t-\pi)$$

נותר להתמיר לאחור את H. נפרק לשברים חלקיים ונקבל

$$H(s)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+\frac{5}{4}}\right)$$

כעת יש לנו שתי אפשרויות. ראשית, נוכל לזכור כי

$$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=e^{-\alpha t}\mathcal{L}(\cos(\beta t))$$
$$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=e^{-\alpha t}\mathcal{L}(\sin(\beta t))$$

אם כן, נוכל לכתוב

$$\frac{s+1}{s^2+s+\frac{5}{4}}=\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

ואז

$$\mathcal{L}^{-1}(H(s))=\frac{4}{5}\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\right)$$

דרך נוספת היא לחשב את השורשים של הפולינום הריבועי, ולהמשיך ולפרק לשברים חלקיים.

1.1 קונבולוציה

ההגדרה היא

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

התכונות של זה דומות לשל כפל, למעט:

$$f*1\neq f$$

כמעט אף פעם. למשל

$$(\cos *1)(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau=-\sin(t-\tau)\ |_0^t=\sin t$$

תזכורת

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f*g)&=\mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)\\ \mathcal{L}^{-1}(FG)&=\mathcal{L}^{-1}(F)*\mathcal{L}^{-1}(G)\end{aligned}$$

דוגמא נפתור משוואה אינטגרלית:

$$y(t)+\int_0^1 (t-\tau)\,y(\tau)\ \mathrm{d}\tau=\sin(2t)$$

נשים לב שיש פה קונבולוציה:

$$y+t*y=\sin(2t)$$

נפעיל טרנספורם:

$$\begin{aligned}Y+\mathcal{L}(t)\,Y&=\mathcal{L}(\sin(2t))\\ Y+\frac{Y}{s^2}&=\frac{2}{s^2+4}\\ Y&=\frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}\end{aligned}$$

מכאן אפשר לעבוד ולעשות טרנספורם הפוך:

$$\begin{aligned}Y&=\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{3(s^2+1)}-\frac{1}{3(s^2+4)}\\ y&=\frac{5}{3}\sin(2t)+\frac{1}{3}\sin(t)\end{aligned}$$