משוואות דיפררציאליות רגילות 1

© ארזים

15 ביוני 2017

1 אקספוננט המטריצה

נחשב את e^{At} עם

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

אפשר לחשב לפי טור חזקות אבל זה לא מעניין. במקום זה נפתור את המשוואה

$$X'=AX$$
$$X\left(0\right)=\mathrm{Id}$$

הערכים העצמיים הם $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=5$, עם ווקטורים עצמיים

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$
$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$
$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

אז יש פתרון לשמוואה מטריציונית עם תנאי התחלה כלשהו שנראה כמו

$$\tilde{X}\left(t\right)=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{3t} & e^{5t}\\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t}\\ 0 & 0 & 2e^{5t}\end{pmatrix}$$

נחשב את $\tilde{X}^{-1}\left(0\right)$ - קיימת כי הווקטורים ξ_1,ξ_2,ξ_3 בלתי תלויים - שכן יש לנו את הטענה הבאה.

טענה 1.1

$$e^{At}=\tilde{X}\left(t\right)\tilde{X}^{-1}\left(0\right)$$

הגדרה 1.2 מקיים את המדר כי $\tilde{X}^{-1}(0)$ קבועה. כמו כן,

$$\tilde{X}(0)\tilde{X}^{-1}(0)=\mathrm{Id}$$

ומכאן אלה חישובים.

תכונה הראינו שמתקיים $e^{tA}e^{sA}=e^{(t+s)A}$ לכל $t,s\in\mathbb{R}$. כעת נראה שלכל A,B מסדר n שמתחלפות, כלומר $AB=BA$, מתקיים

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$$

הוכחה: נראה שהמערכת

$$X'=(A+B)X$$
$$X(0)=\mathrm{Id}$$

נפתרת על ידי $e^{(A+B)t}$ כאשר $AB=BA$. נשים לב שבאינדוקציה;

$$A^kB=A^{k-1}BA=\cdots=ABA^{k-1}=BA^k$$

כעת,

$$Be^{At}=B\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nBA^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^nB}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right)B=e^{At}B$$

נגזור את $\left(e^{At}e^{Bt}\right)$:

$$\left(e^{At}e^{Bt}\right)'=Ae^{At}e^{Bt}+e^{At}Be^{Bt}=Ae^{At}e^{Bt}+Be^{At}e^{Bt}=(A+B)e^{At}e^{Bt}$$

לבסוף

$$e^{A\cdot 0}e^{B\cdot 0}=\mathrm{Id}\cdot\mathrm{Id}=\mathrm{Id}$$

ולכן זהו אכן פתרון, ומיחידות

$$e^{At}e^{Bt}=e^{(A+B)t}$$

■

2 עקרון דוהמל למשוואות לא לינאריות

נניח כי

$$
\begin{aligned}
u_t &= Lu + g\left(u\right) \\
u\left(0\right) &= u_0
\end{aligned}
$$

כאשר $L\left(t\right)$ מטריצה, $u, u_0,$ ווקטורים. נניח פתרון

$$S_t = LS\left(t, t_0\right)$$

שמקיים

$$S\left(t, t_0\right) = \mathrm{Id}$$

טענה 2.1

$$u\left(t\right) = S\left(t, 0\right) u_0 + \int\limits_0^t S\left(t, \tau\right) g\left(u\left(\tau\right)\right)\, \mathrm{d}\tau$$

הוכחה:

$$u_t = S_t u_0 + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} S\left(t, \tau\right) g\left(u\left(\tau\right)\right)\, \mathrm{d}\tau + S\left(t, t\right) g\left(u\left(t\right)\right)$$

כעת, $S_t = LS$ ולכן

$$
\begin{aligned}
u_t = LSu_0 + \int\limits_0^t LS\left(t, \tau\right) g\left(u\left(\tau\right)\right)\, \mathrm{d}\tau = \\
= L\left(Su_0 + \int\limits_0^t S\left(t, \tau\right) g\left(u\left(\tau\right)\right)\, \mathrm{d}\tau\right) = Lu
\end{aligned}
$$

■

2.1 למה זה טוב?

נניח $|g| < A$ לכל $t \in \mathbb{R}$ (לשם פשטות נצטמצם למקרה הסקלרי). אם כן, מצלינאריות (גם במקרה הווקטורי), לכל v (גם ווקטור) מתקיים

$$\left|S\left(t, t_0\right) v\right| \leq \left|v\right| K e^{\alpha\left(t - t_0\right)}$$

אם $L\left(t\right)$ חסומה אקספוננציאלית בכל קואורדינטה. עכשיו,

$$\begin{aligned}\left|u\left(t\right)\right| &\leq \left|Su\right|+\left|\int_{0}^{t}S\left(t,\tau\right)g\left(u\left(\tau\right)\right)\,\mathrm{d}\tau\right|\leq\\ &\leq Ke^{\alpha t}\left|u_{0}\right|+\int_{0}^{1}\left|S\left(t,\tau\right)g\left(u\left(\tau\right)\right)\right|\,\mathrm{d}t\leq\\ &\leq Ke^{\alpha t}\left|u_{0}\right|+\int_{0}^{t}Ke^{\alpha\left(t-\tau\right)}A\,\mathrm{d}\tau\leq\\ &\leq Ke^{\alpha t}\left|u_{0}\right|+\frac{AK\left(e^{\alpha t}-1\right)}{\alpha}\leq\tilde{K}e^{\tilde{\alpha}t}\end{aligned}$$

3 התמרת לפלאס

טענה 3.1 נוכיח

$$\mathcal{L}\left(t^{k}\right)=\frac{k!}{s^{k+1}}$$

הוכחה: ראינו שמתקיים

$$\mathcal{L}\left(t^{k}f\left(t\right)\right)=\left(-1\right)^{k}F^{\left(k\right)}\left(s\right)$$

נבחר $f\left(t\right)=1$ ואז

$$F\left(s\right)=\frac{1}{s}$$
$$F^{\left(k\right)}\left(s\right)=\left(-1\right)^{k}\frac{k!}{s^{k+1}}$$

ולכן סיימנו. ■

טענה 3.2 הטרנספורם עובר time scaling:

$$\mathcal{L}\left(f\left(at\right)\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

הוכחה:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(at\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-us}f\left(u\right)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(u\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

■