משוואות דיפרנציאליות רגילות

ארזים ©

8 ביוני 2017

1 מערכות משוואות מסדר ראשון לינאריות במקדמים קבועים

המצב הוא $x' = Px$, כאשר P ריבועית ממשית מסדר n. היום אנחנו מניחים שהיא גם קבועה.

דוגמא

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

המטריצה סימטרית וממשית ולכן לכסינה מעל $\mathbb{R}$. הערכים העצמיים שלה הם $2, -1$.

על ידי חישוב נקבל וקטור עצמי $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ של הערך העצמי 2, ועוד $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. קיבלנו שלושה פתרונות בלתי תלויים:

$$x_1 = \xi_1 e^{2t}$$
$$x_2 = \xi_2 e^{-t}$$
$$x_3 = \xi_3 e^{-t}$$

ולכן נקבל פתרון כללי

$$x = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

דוגמא

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

נקבל ערכים עצמיים $\lambda = 2 \pm i$. נחשב ווקטורים עצמיים ונקבל

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t}$$
$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2-i)t}$$

נרצה פתרונות ממשיים.

$$x^{\mathrm{Re}}(t) = (x_1 + x_2) = 2\mathrm{Re}(x_1)$$
$$x^{\mathrm{Im}}(t) = \frac{1}{i}(x_1 - x_2) = 2\mathrm{Im}(x_1)$$

כך לדוגמא נקבל

$$\mathrm{Re}(x_1)(t) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i \sin t)\right) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right)$$

ובדומה החלק המדומה.

דוגמא

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

ננסה למצוא ערכים עצמיים, ונקבל רק את 2. נחפש ווקטורים עצמיים, ונקבל

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ואין עוד ווקטורים בלתי תלויים בו. כלומר יש לנו צורך ז׳ורדן. דרך ראשונה לעבוד תהיה למצוא ווקטור עצמי מוכלל, כלומר v עם

$$(P - 2I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ואז נקבל פתרון מהצורה

$$x_2 = e^{2t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\right)$$

הדרך השנייה האפשרית היא לכתוב

$$x = e^{2t}\begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}$$

ואז

$$x' = e^{2t}\left(2\begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}\right)$$

ומצד שני,

$$Px = \begin{pmatrix} 3\alpha t + 3\beta - \gamma t - \delta \\ \alpha t + \beta + \gamma t + \delta \end{pmatrix}$$

מכאן נוכל להשוות מקדמים של t ומקדמים חופשיים בכל תא בנפרד ולקבל 4 משוואות. מהן נקבל

$$x\left(t\right) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ c_1 t + c_2 - c_1 \end{pmatrix}$$

כלומר נוכל לקבל פתרון כללי

$$x\left(t\right) = c_1 \left(e^{2t} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא משוואה לא הומוגנית

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את הבעיה ההומוגנית ראשית ונקבל

$$x_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע ווריאציית פרמטרים. ננחש

$$\begin{aligned} x_p &= c_1\left(t\right) x_1\left(t\right) + c_2\left(t\right) x_2\left(t\right) = \\ &= c_1\left(t\right) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\left(t\right) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מהצבה במשוואה נקבל

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'\left(t\right) \\ c_2'\left(t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומכלל קרמר נקבל

$$c_1'\left(t\right) = \frac{\begin{vmatrix} t & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{vmatrix}} = \frac{-2te^{3t}}{-e^{5t}} = 2te^{-2t}$$

נפתור ונקבל

$$c_1\left(t\right) = e^{-2t}\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

וגם אפשר לקבל את המקדם השני.

דוגמא ניתן רעיון נוסף לפתרון.

$$x' = Ax + g$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3e^{t} \end{pmatrix}$$

נלכסן את A ונקבל ערכים עצמיים $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$ וכן ווקטורים עצמיים מתאימים

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת של A היא

$$T = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נגדיר כעת

$$T^{-1}x = y$$

ונקבל

$$T^{-1}x' = AT^{-1}x + T^{-1}g$$

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y + T^{-1}g$$

אלה שתי משוואות לא מצומדות לינאריות מסדר ראשון, ומאוד קל לפתור אותן.