משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

16 במרץ 2017

דוגמא

$$y'(t) = -\frac{1}{(t-5)^2}y$$
$$y(0) = 1$$

נפתור ונקבל

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{(t-5)^2}$$

ניקח אינטגרל על שני הצדדים:

$$\ln y = \int -\frac{1}{(t-5)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t-5} + c$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(t) = e^{\frac{1}{t-5}+c} = A \cdot e^{\frac{1}{t-5}}$$

כאשר A נקרא קבוע האינטגרציה. נציב את תנאי ההתחלה:

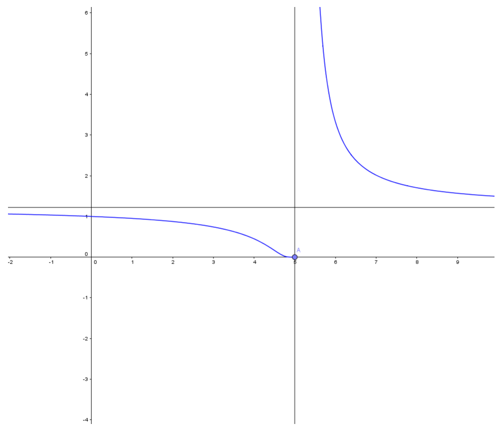
$$1 = y(0) = Ae^{-\frac{1}{5}}$$
$$A = e^{-\frac{1}{5}}$$

נצייר את מה שקיבלנו באיור 1.

שאלה אם נוסיף את הדרישה

$$y\left(e^{10^{10^6}}\right) = 10$$

האם עדיין יש פתרון? כן. בשלב מסויים ביצענו אינטגרל, ורצינו לחפש קדומה - בגלל שיש נקודת אי הגדרה עבור $x = 5$, אפשר לקחת שתי אפשרויות שונות משני הצדדים. בבית - להשתכנע שיש פתרון שמקיים את הדרישה.



איור 1: הפתרון שמצאנו למשוואה

1 משפט קיום ויחידות למשוואות דיפרנציאליות רגילות לינאריות מסדר ראשון

משפט 1.1 נתבונן במשוואה

$$y' + p(x) y = g(x)$$

אם p, g רציפות בקטע (α, β), אזי לכל $x_0 \in (\alpha, \beta)$ קיים y_0 פתרון יחיד $y(x)$ שמקיים את המשוואה לכל $x \in (\alpha, \beta)$, וכן

$$y(x_0) = y_0$$

אם כן, בדוגמא שפתרנו קודם, למשוואה יש פתרון בקטע $(-\infty, 5)$.

משפט 1.2 המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה

$$y' = f(x, y)$$

היא לינארית אם ורק אם

$$y(x) = ca(x) + b(x)$$

כאשר a, b פונקציות גזירות.

הוכחה: אם משוואה היא לינארית, אזי היא מהצוה

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

נכפיל בגורם האינטגרציה

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)\,\mathrm{d}t}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}(\mu y)' &= g(x)\,\mu(x)\\ y &= \underbrace{\frac{\int g(x)\,\mu(x)}{\mu(x)}}_{a(x)} + \underbrace{\frac{c}{\mu(x)}}_{c\cdot b(x)}\end{aligned}$$

בכיוון השני, אם $y = c\cdot a(x) + b(x)$, נגזור ונקבל

$$y'(x) = ca'(x) + b'(x)$$

מכאן, נקבל כי

$$\frac{y' - b'(x)}{a'(x)} = c = \frac{y - b(x)}{a(x)}$$

מכאן, נקבל כי

$$y' - \underbrace{\frac{a'}{a}}_{p(x)} y = \underbrace{b' - a'\frac{b}{a}}_{g(x)}$$

והמשוואה אכן לינארית. ■

2 משוואות ברנולי

הגדרה 2.1 משוואת ברנולי היא משוואה דיפרנציאלית רגילה מהצורה הבאה:

$$y' + p(x)\, y = g(x)\, y^{\alpha}$$

כאשר α קבוע.

דוגמא (ללא תנאי התחלה) נפתור את

$$y' = \frac{2}{x}y + \frac{x}{y^2}$$

נעביר לצורה קנונית:

$$y' - \frac{2}{x}y = xy^{-2}$$

על כן, $\alpha = -2$. נגדיר z באופן הבא:

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} = z^{\frac{1}{3}}$$
$$y' = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}z'$$

נציב זאת במשוואה המקורית.

$$\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}z' - \frac{2}{x}z^{\frac{1}{3}} = xz^{-\frac{2}{3}}$$

נכפול פי $3z^{\frac{2}{3}}$:

$$z' - \frac{6}{x}z = 3x$$

זו משוואה לינארית רגילה לינארית, שאותה אנחנו יודעים לפתור בעזרת גורם אינטגרציה.