משוואות דיפרנציאליות רגילות

ארזים ©

26 באפריל 2017

בפעם האחרונה דיברנו על ישר הפאזה, על נקודות שבת, ועל יציבות של נקודות שבת. כעת נרצה לדון בשאלה האם הפתרון יכול להגיע לנקודת השבת בזמן סופי. נעבוד עם המערכת

$$y'(t) = f(y), t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

נניח כי y^* היא נקודת שבת יציבה לוקלית, $f(y^*) = 0$, $f'(y^*) < 0$. בנוסף נניח כי קיים $t_0 < t_1 < \infty$ כך שמתקיים $y(t_1) < y^*$. אזי למערכת

$$y'(t) = f(t), t < t_1$$
$$y(t_1) = y^*$$

למערכת זו קיים הפתרון הסטציונרי $y = y^*$. לכן, אם מתקיימים תנאי משפט קיום ויחידות, זהו הפתרון היחיד ־ ובמקרה זה לא ניתן להגיע לנקודת השבת בזמן סופי.

דוגמא

$$y' = -y^p$$
$$y(0) = 1$$

כאשר $p > 0$ כלשהו. נפתור עבור $y > 0$. יש נקודת שבת $y^* = 0$, והיא יציבה גלובלית. נרצה לדעת מתי הפתרון יגיע לנקודת השבת. נפתור ראשית כאשר $p \neq 1$:

$$\frac{y'}{y^p} = -1$$
$$\frac{1}{1-p}y^{1-p} = -t + c$$

ומתנאי התחלה נקבל

$$\frac{1}{1-p}y^{1-p} = -t + \frac{1}{1-p}$$

בסך הכל,

$$y^{1-p}=(1-p)\left(\frac{1}{1-p}-t\right)$$

נציב $y=0$:

$$\begin{aligned}0&=(1-p)\left(\frac{1}{1-p}-t\right)\\ t&=\frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

כעת $0<t<\infty$ בדיוק כאשר $0<p<1$. נחזור למקרה בו $p=1$:

$$\begin{aligned}y'&=-y\\ y(0)&=1\end{aligned}$$

הפתרון הוא $y'=e^{-t}$, וזה מגיע לאפס רק בזמן אינסופי.
בודגמה זו, $f=-y^p$, ואז $f_y=-py^{p-1}$. עבור $p<1$, f_y אינה חסומה בסביבת נקודת השבת $y^*=0$. לכן לא מתקיים משפט קיום ויחידות בנקודת השבת.

דרך נוספת להסתכל על זה:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=f(y)\\ y(t_0)&=y_0\end{aligned}$$

כאשר y^* נקודת שבת יציבה. $0<t^*\leq\infty$ זמן ההגעה לנקודת השבת, כלומר $y(t^*)=y^*$. עד נקודת השבת, f לא משנה את סימנה, ולכן y מונוטונית - כלומר נוכל להסתכל על הפונקציה ההפוכה $t(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{f(y)}$$

ניקח אינטגרל לפי y:

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y^*}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y&=\int_{y_0}^{y^*}\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\\ t(y^*)-t(y_0)&=\int_{y_0}^{y^*}\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\\ t^*-t_0&=\int_{y_0}^{y*}\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\sim\int_{y^*-\varepsilon}^{y^*}\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

המעבר האחרון נעשה היותר ורוב התרומה לאינגרל מגיעה קרוב לנקודת השבת ־ היכן שהאינטגרנד מתפוצץ. נמשיך להעריך, תחת ההנחה $|f_y(y^*)| < \infty$, ונפתח טיילור:

$$\int_{y^*-\varepsilon}^{y^*} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y \approx \int_{y^*-\varepsilon}^{y^*} \frac{1}{f(y^*) + (y-y^*)\,f_y(y^*)} = \frac{1}{f_y(y^*)} \int_{y*-\varepsilon}^{y^*} \frac{1}{y-y^*}\,\mathrm{d}y$$

האינטגרל האחרון הוא כמובן אינסופי. נשים לב שהתנאי שהנחנו, $|f_y(y^*)| < \infty$, שקול ליחידות הפתרון של המערכת ־ שוב אנחנו רואים שיחידות קשורה לזמן הגעה אינסופי.

1 אנליזת יציבות לינארית

עד כה, הבחנו בין נקודות שבת יציבות ללא יציבות. לעיתים רוצים גם הערכה כמותית ־ כמה יציב (או לא יציב).

תהי y^* נקודת שבת, $f(y^*) = 0$. נניח כי $y(t)$ קרוב אליה. נרצה לדעת כמה מהר או לאט $y(t)$ ינוע לכיוון (או הרחק מן) y^*. נסמן

$$\eta(t) = y(t) - y^*$$

את המרחק של y מנקודת השבת. אזי

$$\eta'(t) = y'(t) = f(y) = f(y^* + \eta(t))$$

כיוון שהנחנו קרבה בין y, y^*, אזי

$$\eta = y - y^* \ll y^*$$

ולכן

$$f(y^* + \eta) = f(y^*) + \eta f'(y^*) + o\left(\eta^2\right)$$

לכן

$$\eta'(t) = \eta f'(y^*) + o\left(n^2\right)$$

אם $f'(y^*) \neq 0$, אז עבור הפרעות מספיק קטנות, $\eta f'(y^*) \gg n^2$. לכן, נקרב את המשוואה על ידי

$$\eta'(t) = \eta f'(y^*)$$

מדוע מוצדק לקרב את המשוואה? הוכחנו משפט שאומר שהפתרון של מערכת הוא רציף בפונקציה $f(t,y)$. לכן שינויים קטנים כמו הקירובים שאנחנו עושים כאן משנים רק במעט את הפתרון ולכן עדיין יש עניין בלגשת ככה לבעייה.

המשוואה המקורבת היא לינארית. התהליך נקרא לינאריזציה סביב נקודת השבת. הפתרון של הקירוב הוא

$$\eta(t)=\eta(t_0)\,e^{(t-t_0)f'(y^*)}$$

כלומר, ההפרעה גדלה אקספוננציאלית אם $f'(y^*)>0$, וקטנה אקספוננציאלית אם $f'(y^*)<0$. זה מתאים למה שראינו קודם - שהנקודה יציבה כאשר הנגזרת שלילית, ולא יציבה אם היא חיובית. מעבר לזה, קיבלנו אינפורמציה נוספת - הסימן של $f'(y^*)$ קובע יציבות, אבל הגודל $|f'(y^*)|$ קובע את מידת היציבות/אי יציבות. ככל שהגודל $|f'(y^*)|$ גדול יותר, היציבות/אי היציבות יותר חזקה.

סוגי דינמיקות אפשריים במשוואות אוטונומיות מסדר ראשון:

1. תנועה מונוטונית לכיוון נקודת השבת.
2. תנועה מונוטונית לכיוון $y=\pm\infty$.
3. פתרון נשאר קבוע בנקודת השבת.

אין עוד אפשרויות. בתנועה על ישר הפאזה לא ניתן לחזור אחורה.

אנלוג מכני: חוק שני של ניוטון, משמע

$$m\ddot{y}(t)=F(y)$$

אם יש חיכוך המודל נהיה

$$m\ddot{y}(t)+b\dot{y}(t)=f(y)$$

הגורם $b\dot{y}$ הוא גורם החיתוך. נניח כי החיכוך גדול בהרבה מאשר האינרציה. אזי בעצם

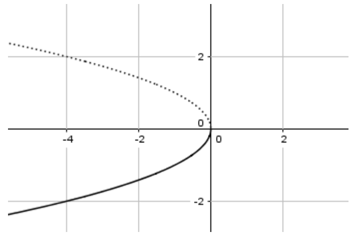
$$b\dot{y}=F$$
$$\dot{y}=\frac{F}{b}$$

לכן ניתן לחשוב על משוואה מסדר ראשון כמתארת תנועה במערכת עם חיכוך גדול מאוד, כך שהאינרציה זניחה. לכן, פתרון ייעצר בנקודת השבת ולא יוכל לעבור אותה.

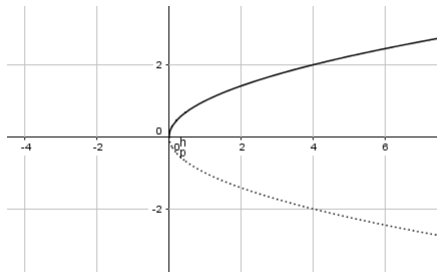
1.1 הסתעפויות

נניח כי $y'=f(y;r)$, כאשר r פרמטר שקשור למערת - טמפרטורה, מידת עושר באוכלוסיה או משהו כזה. כיצד הדינמיקה משתנה כאשר r משתנה?

ראינו שהדינמיקה האיכותית נקבעת על סמך מיקום ויציבות נקודת השבת. לכן נרצה לדעת כיצד נקודות השבת משתנות כתלות בפרמטר r.



איור 1: דיאגרמת ההסתעפויות של הדוגמה



איור 2: דיאגרמת ההסתעפויות של הדוגמה השנייה

דוגמה $y = y^2 + r$. כאשר $r < 0$, יש שתי נקודות שבת, $\pm\sqrt{-r}$. החיובית לא יציבה, והשלילית כן. כאשר $r = 0$, יש נקודת שבת אחת, 0, והיא יציבה למחצה. למעשה שתי נקודות השבת מתאחדות לאחת. אם $r > 0$, אין נקודות שבת. במקרה כזה נאמר שיש הסתעפות (ביפרקציה) בנקודה $r = 0$, כי הפתרון/זרימה שונה איכותית עבור $r < 0$ ועבור $r > 0$. ביפרקציה זו נקראת saddle node bifurcation ומאופיינת על ידי זה שכאשר הפרמטר משתנה, שתי נקודות שבת נעות אחת לכוון השנייה, מתנגשות ונעלמות. היא נקראת גם blue sky bifurcation.

כדי להציג גרפית את השינוי האיכותי בפתרון כפונקציה של r, נשרטט את דיאגרמת ההסתעפויות: גרף של y בנקודת השבת כפונקציה של r. קו מקווקו משמעו נקודת שבת לא יציבה, וקו מלא־ נקודה יציבה. דיאגרמת ההסתעפויות של הדוגמה האחרונה באיור 1.

דוגמה $y' = r - y^2$. עבור $r < 0$ אין נקודות שבת. עבור $r = 0$, יש נקודת שבת $y = 0$, שיציבה למחצית. עבור $r > 0$ יש שתי נקודות שבת, $\pm\sqrt{r}$, כשהחיובית יציבה והשלילית לא ־ עוד מקרה של saddle node bifurcation. דיאגרמת ההסתעפויות באיור 2.

טענה 1.1 במקרה של saddle-node bifurcation, לוקלית, ליד נקודת השבת, המשוואה היא "תמיד" מהצורה $y' = r \pm y^2$, עד כדי קבוע.

הוכחה: (בכאילו) כדי ששתי נקודות שבת יתקרבו ויעלמו, הפונקציה f צריכה להראות כמו פרבולה ליד נקודת ההסתעפות. ■

2 משוואות מסדר גבוה יותר

יש שתי אפשרויות:

1. מערכת של n משוואות מסדר ראשון:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

ונוסיף עוד n תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_1^0 \\ &\vdots \\ y_n(x_0) &= y_n^0 \end{aligned}$$

2. משוואה אחת מסדר n:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

עם n תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

טענה 2.1 ניתן להפוך כל משוואה ממעלה n למערכת של n משוואות מסדר 1.

הוכחה: נתונה משוואה מסדר n. נגדיר

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

ואז $y_1, \ldots, y_n$ מקיימים את המשוואות הבאות מסדר ראשון:

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= y_2 \\
y_2'(x) &= y_3 \\
&\vdots \\
y_n'(x) &= f(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

עם תנאי התחלה

$$
\begin{aligned}
y_1(x_0) &= y_0 \\
&\vdots \\
y_n(x_0) &= y_0^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

■