משוואות דיפרנציאליות רגילות

ⓒ ארזים

20 באפריל 2017

1 שדה כיוונים

בהנתן $y' = f(x,y)$ נשרטט את הווקטורים $(1,f)$, או $\frac{(1,f)}{\sqrt{1+f^2}}$, ונקבל התרשמות של הפתרון.

דוגמא ניקח $y' = 1 - y$. נקבל שדה כיוונים כמו באיור 1. ניתן לראות, למשל, שכל פתרון יקיים

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$$

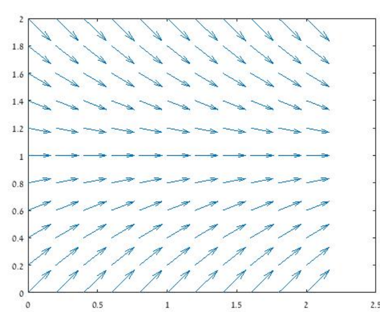
וכן כי אם $y(x_0) > 1$ נקבל פתרון מונוטוני יורד, ואם $y(x_0) < 1$ נקבל פתרון מונוטוני עולה.

בשיטה זו לא ניתן לחשב למשל את $y(10)$ מתוך ידיעת $y(3)$.

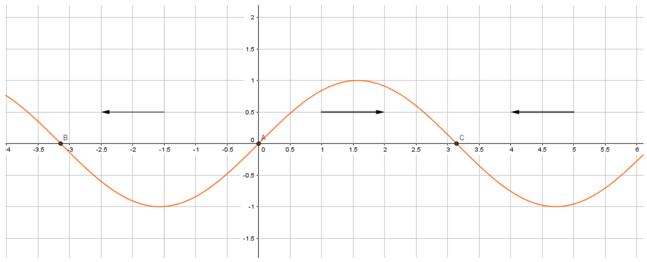
דוגמא $y' = -\frac{x}{y}$. אזי

$$(1,f) = \left(1, -\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}(y,-x) \perp (x,y)$$

השדה מראה כי הפתרונות הם מעגלים סביב הראשית.



איור 1: שדה הכיוונים מהדוגמא



איור 2: ישר הפאזה

1.1 גישה גיאומטרית

דוגמא ניקח

$$y'(t) = \sin y$$
$$y(0) = y_0$$

אפשר לפתור בהפרדת משתנים:

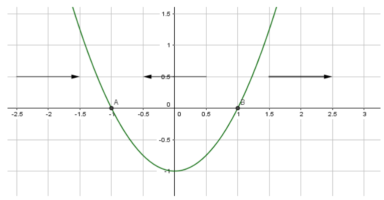
$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \mathrm{d}t$$
$$-\ln\left|\frac{1}{\sin y} + \cot y\right| = t + c =$$
$$= t - \ln\left|\frac{1}{\sin y_0} + \cot(y_0)\right|$$

כלומר

$$t = \ln\left|\frac{\frac{1}{\sin y_0} + \cot(y_0)}{\frac{1}{\sin y} + \cot(y)}\right|$$

מצאנו פתרון מפורש, לא אינפורמטיבי. למשל עבור $y_0 = \frac{\pi}{4}$, מה הגבול של $y(t)$ באינסוף? ננקוט בגישה גרפית. t הוא הזמן, y הוא המיקום, y' הוא המהירות.
נשרטט גרף של y' כפונקציה של y, וזה נקרא ישר הפאזה. נקודוץ שבהן $y' = 0$ נקראות נקודות שבת. במקומות שבהם הנגזרת לא 0, נגיד שהזרימה היא ימינה אם הנגזרת חיובית, או שמאלה אם היא שלילית. נקודות שבת יציבות הן נקודות שבת שהזרימה סביבן היא אליהן, ונקודות שבת לא יציבות הן נקודות שהזרימה סיבן היא הרחק מהן. מישר הפאזה (באיור 2) רואים שאם $y(0) = \frac{\pi}{4}$, הפתרון נע ימינה (מונוטוני עולה) עד שהוא מגיע אל π, כאשר הוא מאיץ עד $\frac{\pi}{2}$ ומאט אחר כך.

הגדרה 1.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה $y' = f(t, y)$ נקראת <u>אוטונומית</u> אם f לא תלויה בערך t, כלומר $y' = f(y)$. משמעות פיזיקאלית - דינמיקה שלא תויה ישירות בזמן בו התהליך התחיל.



איור 3: ישר הפאזה

המשמעות היא שהפתרון הוא אינווריאנטי בזמן, כלומר אם $y\left(t\right)$ פתרון, אז גם $y\left(t-t_0\right)$ פתרון, לכל t_0.

כעת, אם r נקודת שבת, כלומר $f\left(r\right)=0$, אז היא יציבה אם $f'\left(r\right)<0$, ולא יציבה אם $f'\left(r\right)>0$.

דוגמא

$$y'=y^2-1$$

ישר הפאזה באיור 3. רואים כי -1 היא נקודת שבת יציבה לוקאלית, אבל לא גלובלית, בעוד 1 היא נקודת שבת לא יציבה.