משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

22 במרץ 2017

1 יישומים

1.1 דינמיקה של אוכלוסיות

$N(t)$ הוא גודל האוכלוסיה בזמן t. נניח שאין הגירה. ברור כי קצב השינוי באוכלוסיה הוא ההפרש בין קצב הלידות לקצב מקרי המוות. ברור גם שני הדברים האחרונים פרופורציונאליים לגודל N, ולכן נסיק כי קצב הלידות הוא r_1N, קצב מקרי המוות הוא r_2N, כאשר $r_1, r_2 > 0$. אזי

$$N'(t) = (r_1 - r_2) N(t)$$

נסמן $r = r_1 - r_2$ ואז נקבל משוואה

$$N' = rN$$
$$N(0) = N_0$$

אזי

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

אם $r > 0$ יש גידול אקספוננציאלי, אם $r < 0$ יש דעיכה אקספוננציאלית. המודל הזה הוא הרבה פעמים טוב עבור השלב ההתחלתי. כאשר האוכלוסיה מספיק גדולה, כנראה תחול ירידה בשינוי, בגלל מחסור במזון, אוויר או מקום. לעתים אף תתחיל דעיכה של האוכלוסיה.

נניח כעת כי מדובר במושבת חיידקים, ושכל חיידק פולט רעל כתוצאה מחילוף חומרים. קצב מקרי המוות כתוצאה מהרעלה פרופורציוני למכפלה בין מספר החיידקים וכמות הרעל, כאשר כמות הרעל פרופורציונית לכמות החיידקים גם כן - כלומר קצב מקרי המוות כתוצאה מהרעלה הוא aN^2. נקבל

$$N' = rN - aN^2$$

זו משוואה דיפרנציאלי תרגילה ולא לינארית מפורסמת, שנקראת "משוואה לוגיסטית". אפשר לפתור בהפרדת משתנים, לקבל

$$N(t) = \frac{\frac{r}{a}}{1 + \left(\frac{r}{aN(0)} - 1\right) e^{-rt}}$$

מסקנה - אם $N(0) > 0$, אזי

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{r}{a}$$

ולכן מספר זה נקרא carrying capacity - גודל האוכלוסיה שעליו נתייצב, לא משנה מאיזה גודל התחלנו. בעתיד נראה איך ניתן לקבל תוצאה זו מבלי לפתור את המשוואה.

1.2 מודל SIS למחלות מדבקות

נניח שכודל האוכלוסיה הוא קבוע N, שמתחלק לשניים - $S(t)$, הבריאים, ועוד $I(t)$, החולים. נתבונן בסוג המחלות שמי שמבריא מהן עשוי להידבק שוב (צינון, שפעת וכדומה). מתקיימים

$$N = S(t) + I(t)$$

יש תנועה בין I לבין S ולהיפך. נניח שקצב ההחלמה של אדם חולה הוא קבוע γ. נניח גם שכל אדם חולה יכול להדביק כל אדם בריא בקצה β. לכן

$$\begin{aligned} I' &= -\gamma \cdot I + \beta SI \\ S' &= \gamma I - \beta SI \end{aligned}$$

זו מערכת לא לינארית של שתי משוואות דיפרנציאליות רגילות. כיוון שנוכל לכתוב $S = N - I$, נוכל להציב ולקבל

$$\begin{aligned} I' &= -\gamma I + \beta (N - I) I \\ I' &= (\beta N - \gamma) I - \beta I^2 \end{aligned}$$

זו שוב משוואה לוגיסטית. כעת, כמו שראינו קודם

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$$

כעת,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I(t)}{N} = \frac{\beta N - \gamma}{\beta N} = 1 - \frac{\gamma}{\beta N}$$

זה אחוז החולים באוכלוסייה, ונקרא "מצב אנדמי". מצב זה קיים רק אם $\beta N > \gamma$. אחרת, הגבול הוא 0 - כולם מבריאים.

1.3 דיפוזיה של מוצרים חדשים

מגיע מוצר חדש, שלא היה קיים שום דבר שכמוהו קודם. ננסה לחזות את המכירות.

מודל באס (1969): M הוא גודל האוכלוסיה. $n(t)$ הוא מספר המאמצים בזמן t. ההנחה שלנו היא שמי שמאמץ נשאר מאמץ. נחשוב על ההסתברות שמישהו חדש ייאמץ את המוצר בזמן באורך Δt. השפעות חיצוניות, כמו פרסומות, ייתנו $p\Delta t$. יש גם השפעות פנימיות - מפה לאוזן, שהן מהצורה $\frac{q\Delta t\cdot n(t)}{M}$. בסך הכל

$$\begin{aligned}n(t+\Delta t)&=n(t)+(M-n(t))\left(p\Delta t+q\frac{n(t)}{M}\Delta t\right)\\ \frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{\Delta t}&=(M-n)\left(p+\frac{qn}{m}\right)\end{aligned}$$

ניקח $\Delta t\to 0$ ונקבל

$$\begin{aligned}&n'(t)=(M-n)\left(p+q\frac{n}{M}\right)\\ &n(0)=0\end{aligned}$$

וזהו מודל באס. זו משוואה דיפרנציאלית רגילה לא לינארית, אבל שוב ניתן לפתור בהפרדת משתנים. מקבלים

$$n(t)=M\frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

2 משוואות מדוייקות

נתבונן במשוואות מהצורה

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

למעשה מתכוונים למשוואה

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1}$$

נתבונן בפונקציה

$$F(x,y(x))=c$$

כאשר c קבוע. נגזור לפי x:

$$F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2}$$

לכן, אם קיימת $F(x,y)$ המקיימת $F_x = M$,$F_y = N$, נוכל לכתוב

$$
\begin{aligned}
F_x + F_y y' &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y(x)) &= 0 \\
F(x, y(s)) &= c
\end{aligned}
$$

ואז F הפתרון של (1). במקרה זה הקשר בין x, y נתון בצורה סתומה.

הגדרה 2.1 אם קיימת F כזו, נאמר כי (1) היא מדוייקת.

איך נדע אם משוואה היא מדוייקת? כלומר האם קיימת F המקיימת $F_x = M, F_y = N$?
אם כן, תחת תנאי חלשית יחסית (רציפות או משהו כזה)

$$M_y = F_{xy} = F_{yx} = N_x$$

השאלה היא האם גם ההיפך נכון - אם $N_x = M_y$, האם בהכרח המשוואה מדוייקת?

דוגמא נתבונן במשוואה

$$(2x + y)\,\mathrm{d}x + (2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$$

האם המשוואה מדוייקת?

$$(2x + y)_y = 1 = (2y + x)_x$$

כלומר, כן. נחפש F שתקיים

$$
\begin{aligned}
F_x &= 2x + y \\
F_y &= 2y + x
\end{aligned}
$$

ננסה:

$$
\begin{aligned}
F_x &= 2x + y \\
F(x, y) &= x^2 + xy + h(y) \\
F_y &= x + h'(y) = 2y + x \\
h'(y) &= 2y \\
h(y) &= y^2 + \not{c} \\
F(x, y) &= x^2 + xy + y^2 + \not{c}
\end{aligned}
$$

הביטול של c הוא משום שגם ככה נגיע לשוויון לקבוע, לכן נוכל להעבירו צד. לכן הפתרון של המשוואה הוא

$$x^2 + xy + y^2 = \tilde{c}$$

משפט 2.2 תהיינה $M\left(x,y\right)$, $N\left(x,y\right)$, $M_y\left(x,y\right)$, $N_x\left(x,y\right)$ רציפות במלבן $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. אזי המשוואה $M\left(x,y\right) + N\left(x,y\right)y' = 0$ היא מדוייקת, כלומר קיימת $F\left(x,y\right)$ עבורה $F_x = M$, $F_y = N$ לכל x, y במלבן, אם ורק אם $M_y = N_x$.

הוכחה: ראינו כבר את הכיוון השני. את הכיוון השני נראה על ידי חישוב. תהי $\left(x_0, y_0\right)$ במלבן. אזי

$$F_x = M$$
$$F\left(x,y\right) = \int\limits_{x_0}^{x} M\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t + h\left(y\right)$$

אם נציב x_0, נקבל

$$F\left(x_0,y\right) = h\left(y\right)$$

כעת, מותר לגזור מתחת לאינטגרל בגלל הרציפות של N_y, ונקבל

$$N = F_y = \int\limits_{x_0}^{x} M_y\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t + h'\left(y\right)$$

לכן

$$h'\left(y\right) = N\left(x,y\right) - \int\limits_{x_0}^{x} M_y\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t$$

יש לוודא כי אגף ימין הוא אכן רק פונקציה של y. נבדוק:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(N\left(x,y\right) - \int\limits_{x_0}^{x} N_y\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t\right) = N_x - M_y = 0$$

כמו שרצינו. נותר לפתור עבור h:

$$h\left(y\right) = \int\limits_{y_0}^{y} N\left(x,s\right)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} M_y\left(t,s\right)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s + h\left(y_0\right)$$

בלי הגבלת הכלליות $h\left(y_0\right)=0$, כי אחרת נעביר אותו אגף בסוף, ואז

$$F\left(x,y\right)=\int\limits_{x_0}^{x}M\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{y_0}^{y}N\left(x,s\right)\,\mathrm{d}s+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}M_y\left(t,s\right)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

ולכן המשוואה מדוייקת. ■

לכאורה יש בעיה עם עובדים על תחום פשוט קשר כללי ־ ההוכחה לא עובדת, כי האינטגרלים יוצאים מהתחום. המשפט כן נכון.

הערה 2.3 תהי F שחישבנו בהוכחה. אזי

$$\begin{aligned}F&=\int\limits_{x_0}^{x}M\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{y_0}^{y}N\left(x,s\right)\,\mathrm{d}s-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}M_y\left(t,s\right)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\&=\int\limits_{x_0}^{x}M\left(t,y\right)\,\mathrm{d}t+\int\limits_{y_0}^{y}N\left(x,s\right)\,\mathrm{d}s-\int\limits_{x_0}^{x}\left(M\left(t,y\right)-M\left(t,y_0\right)\right)\,\mathrm{d}t=\\&=\int\limits_{y_0}^{y}N\left(x,s\right)\,\mathrm{d}s+\int\limits_{x_0}^{x}M\left(t,y_0\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

מי שמכיר יכול לראות זאת כאינטגרל לאורך עקומה במישור. רואים בחדו"א 4 שאם המשוואה מדוייקת, האינטגרל הזה לא תלוי בעקומה, ולכן המשפט נכון גם בתחום פשוט קשר.

כעת, נניח כי $F\left(x,y\right)=c$. לכן,

$$F_x+F_yy'=0$$

ולכל $h\left(x,y\right)$,

$$h\left(x,y\right)F_x+h\left(x,y\right)F_yy'=0$$

נקבל משוואה חדשה, שלרוב אינה מדוייקת. אבל, אם נכפול אותה בגורם $\mu\left(x,y\right)=\frac{1}{h(x,y)}$, היא תהיה מדוייקת שוב. לכן נדע לפתור משוואה כזו אם נדע לחשב את גורם האינטגרציה $\mu\left(x,y\right)$.

מטרה בהנתן

$$M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$$

נרצה למצוא $\mu\left(x,y\right)\neq0$ כך שהמשוואה

$$\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=0$$

תהיה מדוייקת.