משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 תורת פלוקה

דיברנו על מטוטלת, ועל היציבות של מטוטלת הפוכה מול חוסר יציבות של מטוטלת הפוכה. נרצה להוסיף תזוזה אנכית של

$$y(t) = A\cos(\omega t)$$

ומסתבר שאפשר להוציא ככה מאיזון את המטוטלת הרגילה, ולאזן את ההפוכה. ניתן להוכיח שתנועת המטוטלת כאן תינתן על ידי

$$\ddot{\theta} + \left(\omega^2 A\cos(\omega t) + \omega_0^2\right)\sin\theta = 0$$

עבור זוויות קטנות מספיק נכתוב

$$\ddot{\theta} + \left(\omega^2 A\cos(\omega t) + \omega_0^2\right)\theta = 0$$

זו צורה של משוואת היל:

$$\ddot{u} + a(t)\,u = 0$$

עבור a מחזורית. נעביר למערכת:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

תהי X המטריצה היסודית הטבעית. נשים לב שמתקיים $\mathrm{Tr}A = 0$, ואז

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X(0) &= I_2 \\ X(t+T) &= X(t)\,B \end{aligned}$$

כאשר $B = X(T)$. כדי לחשב את B נפתור את המשוואה עבור u. נצטרך תנאי התחלה

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0, u_1' = 1 \\ u_2(0) &= 1, u_2' = 0 \end{aligned}$$

לכן

$$X\left(t\right)=\begin{pmatrix}u_{1}\left(t\right) & u_{2}\left(t\right)\\ u_{1}'\left(t\right) & u_{2}'\left(t\right)\end{pmatrix}$$

לכן

$$B=\begin{pmatrix}u_{1}\left(T\right) & u_{2}\left(T\right)\\ u_{1}'\left(T\right) & u_{2}'\left(T\right)\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם הפתרונות של

$$\rho^{2}-\mathrm{Tr}\left(B\right)\rho+\det\left(B\right)=0$$

ידוע לנו

$$\det B=e^{\int_{0}^{T}\mathrm{Tr}\left(A\right)}=1$$

לכן יש לנו

$$\rho^{2}-\left(u_{1}\left(T\right)+u_{2}'\left(T\right)\right)\rho+1=0$$

נכתוב

$$\rho^{2}-2\phi\rho+1=0$$

ואז קיבלנו תלות של הערכים העצמיים רק בפרמטר האחד

$$\phi=\frac{u_{1}\left(T\right)+u_{2}'\left(T\right)}{2}$$

נפתור:

$$\rho_{1,2}=\phi\pm\sqrt{\phi^{2}-1}$$

נכתוב $\rho_{i}=e^{\mu_{i}T}$ ואז

$$\rho_{1}\rho_{2}=1\Rightarrow\mu_{1}+\mu_{2}=0$$

$$\rho_{1}+\rho_{2}=2\phi\Rightarrow\phi=\frac{e^{\mu_{1}T}+e^{\mu_{2}T}}{2}=\cos h\left(\mu T\right)$$

כאשר $\mu=\mu_{1}=-\mu_{2}$. כעת נחלק למקרים.

1. $\phi>1$, השורשים מקיימים

$$\rho_{1}>1>\rho_{2}>0$$

ולכן

$$\mu_{1}>0>\mu_{2}=-\mu_{1}$$

אם כן הפתרון הוא

$$u\left(t\right)=c_{1}e^{\mu t}p_{1}+c_{2}e^{-\mu t}p_{2}\left(t\right)$$

כאשר p_{1},p_{2} מחזוריות עם מחזור T. הפתרון לא מחזורי, והוא מתפוצץ בעיקרון - אלא אם $c_{1}=0$.

2. $\phi < -1$, השורשים מקיימים

$$\rho_2 < -1 < \rho_1 < 0$$

לכן נקבל

$$\mu_1 = \frac{i\pi}{T} - r$$
$$\mu_2 = -\mu_1 = r - \frac{i\pi}{T}$$

עבור $r > 0$ ממשי. אזי

$$u(t) = c_1 e^{\frac{i\pi}{T}t} e^{-rt} p_1(t) + c_2 e^{-\frac{i\pi t}{T}} e^{rt} p_2(t) =$$
$$= c_1 e^{-rt} q_1(t) + c_2 e^{rt} q_2(t)$$

כאשר q_1, q_2 בעלות מחזור $2T$. שוב אין פתרונות מחזוריים, והפתרון מתפוצץ אלא אם $c_2 = 0$.

3. $|\phi| < 1$ - השורשים מרוכבים. נכתוב

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\sigma T}$$

כלומר $\mu = \mu_1 = i\sigma = -\mu_2$. הפתרון הוא

$$u(t) = c_1 e^{i\sigma t} p_1(t) + c_2 e^{-i\sigma t} p_2(t)$$

אנחנו יודעים

$$\cosh(\mu T) = \phi$$

ולכן

$$\cos(\sigma T) = \phi$$

אם $|\phi| < 1$ אז נובע

$$0 < \sigma T < \pi$$

בלי הגבלת הכלליות (אפשר לחסר כפולות של 2π ולבחור את האופציה החיובית). ככלל המחזורים בפתרונות לא מצטלבים, אלא אם במקרה $\sigma T = \frac{2\pi}{m}$. ככלל זה פתרון לא מחזורי, אבל כן חסום.

4. $\phi = 1$ - נקבל ערך עצמי יחיד $\rho = 1$, $\mu = 0$. אם $B = I$, אזי $X(t+T) = X(t) B = X(t)$ וכל הפתרונות מחזוריים. אחרת, אנחנו בצורת ז'ורדן, והפתרון הוא מהצורה

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) p(t)$$

כאשר $p(t)$ מחזורית. לכן ייתכן פתרון מחזורי T, אם $c_2 = 0$.

5. $\phi = -1$ - דומה, גם ייתכן פתרון מחזורי $2T$.

נניח שיש לנו משוואת Hill עם פרמטר:

$$u'' + (a(t) + \lambda) u = 0$$

נרצה לדעת איך משתנה אופי הפתרונות כתלות באותו λ. נחשב את $\phi(\lambda)$ (לרוב בצורה נומרית), ואז נוכל לדעת מתי נופלים באיזה מצב מהקודמים.