משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

28 ביוני 2017

1 משוואות לינאריות עם מקדמים מחזוריים

יש לנו המערכת

$$x'(t)=A(t)\,x(t)$$

כאשר

$$A(t+T)=A(t)$$

לכל t. ראינו שאם $X(t)$ מטריצה יסודית אז גם $X(t+T)$ מטריצה יסודית. ראינו גם שמתקיים

$$X(t+T)=X(t)\,B$$

כאשר

$$\det B=e^{\int_0^T \operatorname{tr}(A)}$$

ואפילו

$$B=X^{-1}(0)\,X(T)$$

אם X מטריצה יסודית טבעית אזי $B=X(T)$. כעת, יהא ρ ערך עצמי של B עם ווקטור עצמי $v\neq 0$. אזי

$$Bv=\rho v$$

נגדיר כעת

$$x(t)=X(t)\,v$$

ונקבל כי $x(t)$ פתרון של המשוואה (כי X מטריצה יסודית). בנוסף,

$$x(t+T)=X(t+T)\,v=X(t)\,Bv=\rho X(t)\,v=\rho x(t)$$

אם כן נקבל

$$x(t+kT)=\rho^k x(t)$$

לכן הערך העצמי קובע פי כמה יגדל פיתרון זה על פני מחזור. הפתרון מחזורי אם ורק אם $\rho = 1$. לא ייתכן $\rho = 0$, כי B הפיכה. לכן נוכל להגדיר

$$\rho = e^{\mu T}$$

כלומר

$$\mu = \frac{\ln \rho}{T}$$

במצבים כאלה אנחנו קוראים לערך העצמי ρ הכופל האופייני ולערך μ האקספוננט האופייני (הוא יכול הליות מרוכב). אם כן נכתוב

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\mu t} p(t) \\ p(t) &= e^{-\mu t} x(t) \\ p(t+T) &= e^{-\mu(t+T)} x(t+T) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} \rho x(t) = \\ &= e^{-\mu t} x(t) = p(t) \end{aligned}$$

למעשה הוכחנו את המשפט הבא:

משפט 1.1 יהי ρ ערך עצמי של B, ויהי μ עם $\rho = e^{\mu T}$. אזי קיים פתרון $x(t)$ של המשוואה המקורית כך שלכל t מתקיים

$$x(t+T) = \rho x(t)$$

ובנוסף קיימת פונקציה מחזורית $p(t)$ עם מחזור T עם

$$x(t) = e^{\mu t} p(t)$$

לכל ערך עצמי ווקטור עצמי מתאים פתרון מחזורי כפול אקספוננט. יתכן כי μ מרוכב, כמו שאמרנו, למשל אם ρ שלילי או מרוכב בעצמו. כעת נעבור לדון בפתרון הכללי. נחלק למקרים:

1. המטריצה B לכסינה. קיימים ערכים עצמיים $\rho_1, \ldots, \rho_n$ עם ווקטורים עצמיים $v_1, \ldots, v_n$. לכן אפשר לכתוב $B = SDS^{-1}$ כאשר D אלכסונית. כעת,

$$X(t+T) = X(t) B$$

נגדיר $\tilde{X}(t) = X(t) S$, וזה גם פתרון יסודי של המערכת. בנוסף נוכל לכתוב

$$\tilde{X}(t+T) = X(t+T) S = X(t) BS = X(t) SD = \tilde{X}(t) D$$

כעת תהי $\tilde{x}_j(t)$ העמודה מספר j של $\tilde{X}(t)$. לכן $\tilde{x}_j(t)$ פתרון של המערכת, שמקיים

$$\tilde{x}_j(t+T) = \rho_j \tilde{x}_j(t)$$

לכן שוב נוכל לכתוב

$$\tilde{x}_j(t) = e^{\mu_j t}\tilde{p}_j(t)$$

כאשר $\rho_j = e^{\mu_j T}$, $\tilde{p}_j(t)$ מחזורית עם מחזור T. הפתרון הכללי הוא

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\mu_j t} p_j(t)$$

למשל, קיים פתרון מחזורי עם מחזור T אם ורק אם יש ערך עצמי $\rho_i = 1$, כלומר $\mu_i = 0$. אם $\rho_i < 0$ נקבל

$$\mu_i = \frac{i\pi}{T} + r_i$$

כאשר $r_i \in \mathbb{R}$ ואז

$$e^{\mu_i t} p_j(t) = e^{r_i t} \underbrace{\underbrace{e^{\frac{i\pi t}{T}}}_{period=2T} \underbrace{p(t)}_{period=T}}_{period=2T}$$

לכן נקבל שהפתרון הזה הוא אקספוננט כפול פונקציות מחזוריות $2T$.

2. B לא לכסינה - כלומר $S^{-1}BS = J$, J מטריצת ז'ורדן. שוב נקבל

$$\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t) J$$

נניח שיש לנו ערך עצמי ρ עם ריבוי אלגברי k וריבוי גיאומטרי 1. k העמודות של $\tilde{X}(t)$ שמתאימות לבלוק הזה הן פתרונות של המערכת המקורית, שמקיימים (ניפטר מסימני $\sim$):

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \rho x_1(t) \\ x_2(t+T) &= \rho x_2(t) + x_1(t) \\ &\vdots \\ x_k(t+T) &= \rho x_k(t) + x_{k-1}(t) \end{aligned}$$

עבור x_1 נקבל $x_1(t) = e^{\mu t} p(t)$ כאשר p מחזורית עם מחזור T. עבור x_2 נחפש פתרון מהתורה $x_2(t) = e^{\mu t} q(t)$. נציב:

$$\begin{aligned} & x_2(t+T) = e^{\mu(t+T)} q(t+T) = \rho x_2(t) + x_1(t) = \rho e^{\mu t} q(t) + e^{\mu t} p(t) \\ & \rho q(t+T) = \rho q(t) + p(t) \end{aligned}$$

אם כן נקבל

$$q(t+T) - q(t) = \frac{p(t)}{\rho}$$

ומכאן נקבל שהפתרון נתון על ידי

$$q\left(t\right)=\frac{t}{\rho T}p\left(t\right)+p_{2}\left(t\right)$$

כאשר $p_{2}\left(t\right)$ שוב מחזורית עם מחזור T. נראה שזה אכן עובד:

$$\begin{aligned}q\left(t+T\right)-q\left(t\right) & =\frac{t+T}{\rho T}p\left(t+T\right)-\frac{t}{\rho T}p\left(t\right)=\\ & =\frac{t+T}{\rho T}p\left(t\right)-\frac{t}{\rho T}p\left(t\right)=\frac{p\left(t\right)}{\rho}\end{aligned}$$

אם כן, קיבלנו

$$x_{2}\left(t\right)=\frac{t}{\rho T}e^{\mu t}p\left(t\right)+e^{\mu t}p_{2}\left(t\right)$$

תרגיל

$$\begin{aligned}x_{3}\left(t\right) & =\frac{t\left(t-T\right)}{2\left(\rho T\right)^{2}}e^{\mu t}p\left(t\right)+\rho^{\mu t}p_{3}\left(t\right)\\ x_{j}\left(t\right) & =\frac{t\left(t-T\right)\cdots\left(t-\left(j-2\right)T\right)}{\left(j-1\right)!\left(\rho T\right)^{j-1}}e^{\mu t}p\left(t\right)+c_{j}e^{\mu t}p_{j}\left(t\right)\end{aligned}$$

בסך הכל, הפתרון הכללי ניתן לכתיבה בתור

$$x\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}c_{i}e^{\mu t}q_{i}\left(t\right)p_{i}\left(t\right)$$

כאשר p_{i} מחזוריות, q_{i} פולינומים.

החולשה של התורה הזו היא שצריך לדעת את B כדי למצוא לה ערכים עצמיים, ובשבילה צריך למצוא מטריצה יסודית. נרצה לדעת אם אפשר לומר משהו על $\left\{ \mu_{i}\right\} ,\left\{ \rho_{i}\right\}$ או אפילו רק על הפתרונות באופן מפורש?

דוגמה (מרקוס־יאמאבה) יש לנו המשוואה

$$x'=\left(\begin{array}{cc}-1+\frac{3}{2}\cos^{2}t & 1-\frac{3}{2}\sin t\cos t\\ -1-\frac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\frac{3}{2}\sin^{2}t\end{array}\right)x$$

זמן המחזור הוא π, ואפשר לחשב את הערכים העצמיים שלה ולגלות שאינם תלויים במשתנה t:

$$\rho_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{7}i\right)$$

החלק הממשי שלהם הוא שלילי. סביר לצפות שהפתרונות ידעכו בזמן, אבל אפשר להראות שיש פיתרון

$$x=e^{\frac{t}{2}}\left(\begin{array}{c}-\cos t\\ \sin t\end{array}\right)$$

דוגמה מטוטלת יש לנו חוט באורך l עם מסה זניחה. נסמן את הזווית של החוט ממרכז התנועה המעגלית שלו θ. בסוף החוט תלוייה מסה m, ועליה פועל כח הכבידה. נוכל לפרק את הכח לכיוון רדיאלי וכיוון טנגנציאלי ולקבל

$$m(\ddot{\theta}l) = -mg\sin\theta$$
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

כאשר $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. נכתוב כמערכת:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\omega_0^2\sin x_1$$

נחפש פתרונות סטציונריים, עם $x_2 = 0$, ונקבל

$$\theta = n\pi, \dot{\theta} = 0$$

יש כאן שני סוגים של פתרונות - מטוטלת קבועה למטה (שנעריך שהוא יציב) וקבועה למעלה (שנעריך שאינו יציב). נצייר את הפתרונות במישור, בו כל ציר הוא פתרון, ונרצה לצייר את קווי הרמה. במקרה שלנו למשל נוכל לכתוב

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

ולכפול פי $\dot{\theta}$, ולקחת אינטגרל:

$$\int \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2\dot{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = c$$
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}\left(t\right)^2 - \omega_0^2\cos\theta = c$$
$$\frac{1}{2}x_2^2 - \omega_0^2\cos x_1 = c$$

ליד $(0,0)$ הפתרונות נראים כמו אליפסות כי $\cos x_1 \approx 1 - \frac{1}{2}x_1^2$:

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2x_1^2 = \tilde{c}$$

כלומר קווי הרמה הם אליפסות. אכן, שינוי קטן ידאג שנישאר באיזור של הפתרון. כעת נרצה לנתח את הנקודה השנייה, $(\pi, 0)$. אם כן,

$$x_1 \approx \pi$$
$$\varphi = \theta - \pi = x_1 - \pi$$
$$\cos\left(x_1\right) = \cos\left(\varphi + \pi\right) = -\cos\left(\varphi\right) \approx -\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

הפעם נקבל

$$\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\left(x_1 - \pi\right)^2 = \tilde{c}$$

כלומר קווי הרמה הם היפרבולות. הפעם שינוי קטן יגרום לנו לברוח מהנקודה. אפשר לצייר את המשוואה שיצאה לנו מראש (עם הקוסינוס) בכל מקום, ולראות איך זה מתנהג בכל המישור.