משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 תורת פלוקה (Floquet) למשוואות דיפרנציאליות רגילות עם מקדמים מחזוריים

נתחיל במקרה הסקלרי.

דוגמה

$$x'(t) = (1 + \sin t)\, x$$

זמן המחזור כאן הוא $T = 2\pi$. נפתור ונקבל

$$x(t) = ce^{\int 1+\sin t} = ce^{t-\cos t}$$

יש כאן רכיב מחזורי, אבל הפתרון לא מחזורי - הוא לא חסום כאשר $t \to \infty$.

כעת נדון במקרה הסקלרי הכללי:

$$x' = a(t)\, x$$
$$x(0) = x_0$$

כאשר a מחזורית. הפתרון הוא

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$$

נסמן את הממוצע של a על פני מחזור:

$$\overline{a} = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s$$

נסמן $p(t) = a(t) - \overline{a}(t)$. אז, כמובן

$$\overline{p} = \overline{a} - \overline{a} = 0$$

כלומר האינטגרל הבא מתאפס

$$\int_t^{t+T} p(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

טענה 1.1 אם $b(t) = b(t+T)$ לכל t, אזי האינטגרל $\int_t^{t+T} b(s)\,\mathrm{d}s$ הוא בלתי תלוי במשתנה s.

הוכחה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{t+T} b = b\,|_t^{t+T} = 0$$

$\blacksquare$

כעת,

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a} = x_0 e^{\int^t \overline{a}+p} = x_0 e^{\overline{a}t} e^{\int^t p}$$

ולכן

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0 e^{\overline{a}(t+T)} e^{\int_0^{t+T} p} = \\ &= x_0 e^{\overline{a}t} e^{\overline{a}T} e^{\int_0^t p} e^{\int_t^T p} = \\ &= e^{\overline{a}T} x_0 e^{\overline{a}t} e^{\int_0^t p} = e^{\overline{a}T} x(t) \end{aligned}$$

נסמן

$$\rho = e^{\overline{a}T}$$

ואז

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \rho x(t) \\ x(t+kT) &= \rho^k x(t) \end{aligned}$$

מסקנה 1.2 הפתרון מחזורי אם ורק אם $\rho = 1$, אם ורק אם $\overline{a} = 0$. הפתרון לא חסום אם ורק אם $\rho > 1$, אם ורק אם $\overline{a} > 0$.

נרצה להכליל למערכת. ניקח את $x' = A(t)\,x$. ניזכר במטריצה היסודית Ψ, שהיא הפתרון של

$$\Psi' = A(t)\,\Psi$$

אם בנוסף $\Psi(0) = I$, היא נקראת יסודית טבעית.

משפט 1.3 תהי $X(t)$ מטריצה יסודית כלשהי של המשוואה עם המקדמים המחזוריים. אזי $X(t+T)$ היא גם מטריצה יסודית שלה, ובנוסף לכל t מתקיים

$$X(t+T) = X(t)\,B$$

כאשר B היא מטריצה קבועה, לא סינגולרית, שמקיימת

$$\det(B) = e^{\int_0^T \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s}$$

הוכחה: X מטריצה יסודית, ולכן

$$X' = A(t)X$$

לכל t (וכן $\det(X(t)) \neq 0$). לכן בפרט

$$X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$$

וכן $\det(X(t+T)) \neq 0$. כעת, נסתכל בעמודה j של $X(t+T)$. עמודה זו היא פתרון של המשוואה, ולכן אפשר לפרוש אותה בעזרת עמודות $X(t)$:

$$X_j(t+T) = X(t) \cdot b_j$$

כאשר b_j ווקטור מקדמים כלשהו. אם כן, נגדיר B את המטריצה שעמודותיה b_j, ואז

$$X(t+T) = X(t)B$$

בגלל זה, פתרון של המשוואה ככלל אינו מחזורי. נציב $t=0$ ונקבל

$$B = X^{-1}(0)X(T)$$

ובפרט אם $X(t)$ היא יסודית טבעית, $X(0)=I$, אזי $B = X(T)$.
כעת ניזכר בנוסחה לוורונסקיאן:

$$\det(X(t)) = W(t) = W(0)e^{\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s}$$

אם כן,

$$W(t+T) = W(0)e^{\int_0^{t+T} \mathrm{Tr}(A)} = W(0)e^{\int_0^t \mathrm{Tr}(A)}e^{\int_t^{t+T} \mathrm{Tr}(A)} = W(t)e^{\int_t^{t+T} \mathrm{Tr}(A)} =$$
$$= \det(X(t))e^{\int_0^T \mathrm{Tr}(A)}$$

המעבר האחרון נכון ממחזוריות. אם כן,

$$W(t+T) = \det(X(t+T)) = \det(X(t)B) = \det(X(t))\det B$$

ומכאן נקבל כמו שרצינו

$$\det B = e^{\int_0^T \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s}$$

■

הערה 1.4 נניח שהתחלנו ממטריצה יסודית אחרת $\tilde{X}(t)$. היינו מקבלים

$$\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t)\tilde{B}$$

נשים לב שהמטריצה $\tilde{B}$ יכולה להיות שונה מהמטריצה B, אבל היות וכל שתי מטריצות יסודיות נבדלות במטריצה קבועה ולא סינגולרית, נסמן $\tilde{X}(t) = X(t)C$, ואז

$$\tilde{B} = \tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(T) = C^{-1}X^{-1}(0)X(T)C = C^{-1}BC$$

ולכן הן דומות. בפרט יש להן אותם ערכים עצמיים.