משוואות דיפרנציאליות רגילות

ארזים ©

21 ביוני 2017

1 התמרת לפלאס

בשיעור שעבר ראינו נוסחה להתמרת לפלאס של נגזרת - וזה מאפשר לנו להעביר בעיית תנאי התחלה עבור $f(t)$ למשוואה אלגברית עבור $F(s)$, לפתור אותה (בקלות) ולהפוך את זה לתשובה בכיוון ההפוך.

דוגמה נפתור את

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin(2t) \\ y(0) = 0, y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

נתמיר את המשוואה:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \mathcal{L}(\sin(2t)) \\ \left(s^2+1\right) Y(s) &= \mathcal{L}(\sin(2t)) + 1 \end{aligned}$$

נזכור שראינו

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{2}{s^2+4}$$

לכן נקבל בסך הכל

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

כעת נרצה להתמיר בחזרה. ההתמרה היא לינארית, ולכן גם ההפוכה. לכן נפרק את המנה הזו לגורמים פשוטים יותר, שכל אחד מהם אנחנו יודעים להתמיר לאחור (מהטבלה). נפרק לשברים חלקיים:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{5}{3(s^2+1)} - \frac{2}{3(s^2+4)} = \mathcal{L}\left(\frac{5}{3}\sin t\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\sin(2t)\right) \\ \mathcal{L}^{-1}(Y) &= \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t) \end{aligned}$$

הערה 1.1 בניגוד לשיטות הקודמות, כאן לא פותרים קודם עבור $y = y_p + y_H$ ואחר כך מציבים תנאי התחלה וכן הלאה. הכל בבת אחת. היתרון הוא שפותרים משוואה אלגברית, ולא דיפרנציאלית. החלק הקשה הוא לרוב ההתמרה ההפוכה - אם יש מזל אפשר לפרק לצירוף של התמרות מוכרות, ואז ההתמרה ההפוכה פשוטה. קיימת נוסחה מפורשת עבור ההתמרה ההפוכהת שכוללת אינטגרציה במישור המרוכב.

תזכורת $\mathcal{L}\left(e^{at}f\left(t\right)\right) = F\left(s-a\right)$. לכן, $\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-a\right)\right) = e^{at}f\left(t\right)$.

דוגמה נחשב את

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-2\right)^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-2\right)\right)$$
$$F\left(s\right) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) = \sin t$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-2\right)\right) = e^{2t}\sin t$$

1.1 פונקציות מדרגה

ניקח פונקציה

$$u_c\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

מתקיים

$$\mathcal{L}\left(u_c\left(t\right)\right) = \int\limits_0^\infty u_c\left(t\right)e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int\limits_c^\infty e^{-st} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

נשתמש בזה כדי להזיז פונקציה בזמן - אם פונקציה f מתחילה באפס ורוצים להזיז אותה להתחיל בזמן c, לוקחים $g\left(t\right) = u_c\left(t\right)f\left(t-c\right)$.

משפט 1.2 נניח כי $F\left(s\right) = \mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$ מוגדר עבור $s > a$, ונניח כי $c > 0$. אזי

$$\mathcal{L}\left(u_c\left(t\right)f\left(t-c\right)\right) = e^{-cs}F\left(s\right), s > a$$

מסקנה 1.3

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-cs}F\left(s\right)\right) = u_c\left(t\right)f\left(t-c\right)$$

את אלה נוכיח בתרגיל.

דוגמה ניקח

$$F\left(s\right)=\frac{1-e^{-2s}}{s^{2}}$$

מהטבלה ידוע לנו כי $\mathcal{L}\left(t\right)=\frac{1}{s^{2}}$, ולכן

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{2}}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2t}\frac{1}{s^{2}}\right)=t-u_{2}\left(t\right)\left(t-2\right)=\begin{cases}t & t\leq2\\2 & t\geq2\end{cases}$$

1.2 קונוולוציה

הגדרה 1.4 בהינתן f,g פונקציות, הקונבולוציה שלהן:

$$\left(f*g\right)\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau$$

תכונות

1. $f*g=g*f$.
2. $f*\left(g_{1}+g_{2}\right)=f*g_{2}+f*g_{2}$.
3. $\left(f*g\right)*h=f*\left(g*h\right)$.
4. $f*0=0$.

הפעולה הזו דומה לכפל, אבל היא כמובן לא כפל:

$$f*1\neq f$$

ניקח $f=\cos t$:

$$f*1=\sin t$$
$$1*1=t$$

משפט 1.5 יהיו

$$F\left(s\right)=\mathcal{L}\left(f\left(s\right)\right)$$
$$G\left(s\right)=\mathcal{L}\left(g\left(s\right)\right)$$

ונניח כי f,g חסומות על ידי e^{at} לכל $t\geq M$. אזי לכל $s\geq a$,

$$\mathcal{L}\left(f*g\right)=F\left(s\right)\cdot G\left(s\right)$$

הוכחה:

$$\mathcal{L}\left(f*g\right)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\left(f*g\right)(t)\ \mathrm{d}t=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^t f\left(t-\tau\right)g\left(t\right)\ \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=$$
$$=\int\limits_0^\infty e^{-st}\int\limits_0^\infty f\left(t-\tau\right)g\left(t\right)u_0\left(t-\tau\right)\ \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=\int\limits_0^\infty g\left(\tau\right)\underbrace{\int\limits_0^\infty u_0\left(t-\tau\right)f\left(t-\tau\right)e^{-st}}_{e^{-s\tau}F(s)}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=$$
$$=F\left(s\right)\int\limits_0^\infty g\left(\tau\right)e^{-s\tau}\ \mathrm{d}\tau=F\left(s\right)G\left(s\right)$$

■

נראה שימוש בקונוולוציה, מעבר להתמרה הפוכה של מכפלה. אפשר בעזרת זה לפתור משוואות אינטגרליות. למשל, יש לנו את מודל באס לשיווק ־ יש מוצר חדש, יש השפעה של אמצעי תקשורת p, השפעה של חברים q, ונוסחה הגיונית היא

$$n'\left(t\right)=\left(M-n\left(t\right)\right)\left(p+\frac{q}{M}n\left(t\right)\right)$$

כאשר n היא כמות המאמצים בזמן t, M הוא גודל השוק. ידענו לפתור את זה בהפרדת משתנים ולקבל נוסחה, אבל יש כאן הנחה שנחשבת בעייתית ־ כולם משפיעים על כולם. נדבר כעת על מודל באס על רשת חברתית. ניקח מודל קיצוני לכיוון השני ־ כל אחד משפיע בדיוק על אדם אחד אחר, ומושפע מבן אחד אחר. אז ההסתברות שמישהו חדש יאמץ את המוצר גדלה אחרי שהמשפיע עליו אימץ. אם יש רק את p, כלומר $q=0$, נקבל

$$n'=\left(M-n\right)p$$

אם נוסיף את q עכשיו:

$$n\left(t\right)\approx\int\limits_0^t p\left(M-n\left(t\right)\right)\left(1+q\left(t-\tau\right)\right)\ \mathrm{d}\tau$$

נחלק פי M, נגדיר $f\left(t\right)=\frac{n(t)}{M}$ ונקבל

$$f\left(t\right)\approx\int\limits_0^t p\left(1-f\left(t\right)\right)\left(1+q\left(t-\tau\right)\right)\ \mathrm{d}t=\left(p\left(1-f\left(t\right)\right)\right)*\left(1+qt\right)$$

בגלל היחס בין ההתמרה לקונבולוציה נקבל את מכפלת ההתמרות, משמע

$$F=p\left(\frac{1}{s}-F\right)\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{q}{s^2}\right)=\frac{p}{s^2}+\frac{pq}{s^3}-\frac{pF}{s}-\frac{pqF}{s^2}$$
$$F=\frac{p}{s}\frac{s+q}{s^2+ps+pq}=\frac{p\left(s+q\right)}{s\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)}$$

עבור

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4pq}}{2}$$

כעת,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_2}\right) = \frac{1}{s_1-s_2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right) = \frac{1}{s_1-s_2}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$$

ומשם אפשר להמשיך ולחשב עד הסוף (מאוד טכני ונשאר כתרגיל).