משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

15 ביוני 2017

1 טרנספורם לפלאס

נשוב לדון בתכונות של הטרנספורם.

משפט 1.1 אם $\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)$ מוגדר עבור $s>\alpha$ (כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$) ואם $a\in\mathbb{R}$, אזי

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f\left(t\right)\right)=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(s-a\right)$$

לכל $s>a+\alpha$.

הוכחה:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f\left(t\right)\right)=\int\limits_0^\infty e^{-st}e^{at}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^\infty e^{(a-s)t}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\tilde{s}t}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(\tilde{s}\right)=\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(s-a\right)$$

■

למשל,

$$\mathcal{L}\left(e^{at}e^{ibt}\right)=\frac{1}{s-a-ib}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\cos\left(bt\right)\right)=\frac{b}{\left(s-a\right)^2+b^2}$$

כמובן כאשר $s>a$.

משפט 1.2 תהי f גזירה למקוטעין בקטע $[0,T]$ (במשמעות של רציפה למקוטעין) לכל $T\geq0$, וכמו כן

$$\left|f\left(t\right)\right|\leq ke^{at}$$

לכל $t \geq M$. אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mathcal{L}\left(t^k f\left(t\right)\right) = \left(-1\right)^k F^{(k)}\left(s\right)$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה. המקרה $k=0$ ברור מההגדרה. כעת,

$$F^{(k+1)}\left(s\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F^{(k)}\left(s\right)\right) = \left(-1\right)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left(t^k f\left(t\right)\right) =$$
$$= \left(-1\right)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

כעת, נראה שמותר להחליף גזירה ואינטגרציה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left(\int_0^\infty e^{-(s+\Delta s)t}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-st}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_0^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st}\right)t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left(\int_0^M \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st}\right)t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t - \int_M^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st}\right)t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)$$

בקטע $[0, M]$ יש לנו פונקציות רציפות במידה שווה, ולכן אפשר להכניס את הגבול כמו שרצינו. באינטגרל השני,

$$\frac{1}{\Delta s}\int_M^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st}\right)t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \int_M^\infty \frac{e^{-st}}{\Delta s}\left(e^{-\Delta st} - 1\right)t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \left[e^{-x} - 1 \leq x\right] \leq \int_M^\infty e^{-st}t^{k+1} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{M\to\infty} 0$$

לכן נקבל

$$F^{(k+1)}\left(s\right) = \left(-1\right)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left(-1\right)^k \int_0^\infty -te^{-st}t^k f\left(t\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left(-1\right)^{k+1}\int_0^\infty e^{-st}t^{k+1} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left(t^{k+1} f\left(t\right)\right)$$

$\blacksquare$

מסקנה 1.3 $F(s)\in C^{\infty}$.

התמרות נפוצות:

1. $f=1$, $F=\frac{1}{s}$.
2. $f=e^{at}$, $F=\frac{1}{s-a}$.
3. $f=t^{n}$, $F=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

1.1 פתרון משוואות דיפרנציאליות בעזרת טרנספורם לפלאס

אם יש לנו משוואה

$$y''=\cos t+y$$

נפעיל את טרנספורם לפלאס (אם זה אפשרי):

$$g\left(Y\left(s\right)\right)=\frac{s}{s+1}+Y\left(s\right)$$

כאשר g היא איזשהו קשר שכעת נוכיח את טיבו:

משפט 1.4 אם $f\left(t\right)$ רציפה, $f'\left(t\right)$ רציפה למקוטעין בכל קטע $[0,A]$ וכן קיימים קבועים עבורם

$$\left|f\left(t\right)\right|\leq ke^{at}$$

לכל $t\geq M$, אזי $\mathcal{L}\left(f'\left(t\right)\right)$ מוגדר לכל $s>a$ ומתקיים

$$\mathcal{L}\left(f'\left(t\right)\right)=s\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)-f\left(0\right)$$

הוכחה: נסמן $t_{1},\ldots,t_{n}$ את נקדודות אי הרציפות של f' בקטע $[A]$. אזי

$$\int_{0}^{A}e^{-st}f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{t_{1}}e^{-st}f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\int_{t_{1}}^{t_{2}}e^{-st}f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_{n}}^{A}e^{-st}f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

בכל קטע קטן כזה, f' רציפה, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה בחלקים.

$$\int_{0}^{A}e^{-st}f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=e^{-st}f\left(t\right)|_{0}^{t_{1}}+e^{-st}f\left(t\right)|_{t_{1}}^{t_{2}}+\cdots+e^{-st}f\left(t\right)|_{t_{n}}^{A}+$$

$$+s\left(\int_{0}^{t_{1}}e^{-st}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\int_{t_{1}}^{t_{2}}e^{-st}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_{n}}^{A}e^{-st}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)$$

החלק הראשון הוא טלסקופי:

$$e^{-st}f\left(t\right)\big|_{0}^{t_1}+e^{-st}f\left(t\right)\big|_{t_1}^{t_2}+\cdots+e^{-st}f\left(t\right)\big|_{t_n}^{A}=e^{-sA}f\left(A\right)-e^{-s\cdot 0}f\left(0\right)=e^{-sA}f\left(A\right)-f\left(0\right)$$

ולכן הגבול של החלק הזה כאשר לוקחים $A\to\infty$ הוא $-f\left(0\right)$, כי f חסומה על ידי אקספוננט החל ממקום מסויים. כעת נטפל באינטגרלים. נוכל לאחדם, ולקבל

$$s\int_{0}^{A}e^{-st}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

ולכן כאשר נשאיף את $A\to\infty$ נקבל

$$sF\left(s\right)$$

ובסך הכל סיימנו. $\blacksquare$

הערה 1.5 באינדוקציה,

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\left(t\right)\right)=s^{n}\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}\left(0\right)$$