משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

14 ביוני 2017

1 אקספוננט המטריצה

מתבוננים במשוואה $X'(t) = PX(t)$ כאשר X, P מטריצות, P קבועה ביחס למשתנה t.
ראינו שעבור תנאי ההתחלה $X(0) = I_n$ הפתרון הוא

$$X(t) = e^{Pt}$$

כאשר מגדירים

$$e^{Pt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n P^n}{n!}$$

נחזור למערכות של משוואות דיפרנציאליות, משמע $x'(t) = Ax(t)$, כאשר x וקטור, A מטריצה קבועה. כאשר $x(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$.

טענה 1.1 הפתרון של המערכת הזו עם תנאי ההתחלה הזה הוא

$$x(t) = e^{tA} v_0$$

הוכחה: נציב במשוואה. אפשר לגזור, או שאפשר לשים לב שידוע לנו שמהשוואה המטריציונית הזו

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}$$

מתקיימת, ולכן גם כפל מימין בווקטור שומר על זה. עבור תנאי ההתחלה:

$$x(0) = e^{A \cdot 0} v_0 = \mathrm{Id} \cdot v_0 = v_0$$

כנדרש. ■

כעת נעבור לפתור מערכת משוואות לא הומוגנית:

$$x'(t) = Ax(t) + g(t)$$

כאשר x, g וקטורים, A מטריצה קבועה.

טענה 1.2 הפתרון עבור תנאי ההתחלה $x(0)=v_0\in\mathbb{R}^n$ הוא

$$x(t)=e^{At}v_0+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}g(s)\ \mathrm{d}s$$

כאשר האינטגרל הוא כמובן קואורדינטה־קואורדינטה.

הערה 1.3 זה עובר בדיקת קונסיסטנטיות ־ אם $g=0$ נקבל את הפתרון של המערכת ההומוגנית.

בנוסף, אנחנו לא עוברים דרך פרישת מרחב הפתרונות של הבעיה ההומוגנית כלל.

הוכחה: (של הטענה) הפתרון הכללי של הבעיה ההומוגנית הוא $x_h(t)=e^{tA}c$, כאשר c ווקטור כלשהו. נלך בשיטת ווריאציית הפרמטרים, כלומר ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$x_p=e^{tA}c(t)$$

כאשר c ווקטור. נגזור:

$$x_p'(t)=Ae^{tA}c(t)+e^{tA}c'(t)$$

מהמשוואה נרצה

$$Ae^{tA}c(t)+e^{tA}c'(t)=Ae^{tA}c(t)+g(t)$$

ולכן נקבל

$$e^{tA}c'(t)=g(t)$$

ראינו שמתקיים $e^{-tA}=\left(e^{tA}\right)^{-1}$ ולכן נקבל

$$c'(t)=e^{-tA}g(t)$$

ומכאן

$$c(t)=\int\limits_0^t e^{-sA}g(s)\ \mathrm{d}s$$

אזי הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t)=e^{tA}\left(c+\int\limits_0^t e^{sA}g(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$v_0 = x(0) = c + 0$$

ולכן הפתרון הוא

$$x(t) = e^{tA}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\ \mathrm{d}s$$

וסיימנו. $\blacksquare$

נניח כעת כי $v_0 = 0$. אז

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\ \mathrm{d}s$$

האיבר $e^{(t-s)A}g(s)$ הוא הפתרון לבעייה ההומוגנית בזמן t עם תנאי ההתחלה $x(s) = g(s)$. באופן אינטואיטיבי, אנחנו סוכמים בכל זמן $0 < s < t$ את תנאי ההתחלה $g(s)$. אפשר להבין את זה היטב על ידי סכומי רימן.

2 עקרון דוהמל (Duhamel)

נתונה משוואה לינארית הומגנית:

$$\begin{aligned} u_t &= L(t)\,u \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

כאשר $u, u_0 \in \mathbb{R}^n$ וכן $L(t) \in M_n(\mathbb{R})$. נסמן עבור המערכת המטריציונית המתאימה

$$\begin{aligned} S_t &= L(t)\,S \\ S(t_0) &= \mathrm{Id} \end{aligned}$$

כאשר $S \in M_n(\mathbb{R})$. אזי הפתרון למערכת המקורית הוא

$$u(t) = S(t, t_0)\,u_0$$

כאשר $S(t, t_0)$ היא הפתרון למערכת עם תנאי התחלה בנקודה t_0.

תכונות של S.

1. $S(t,t) = \mathrm{Id}$, שכן $u_0 = u(t_0) = S(t_0, t_0)\,u_0$ לכל $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

.2

$$S\left(t_2,t_0\right)=S\left(t_2,t_1\right)S\left(t_1,t_0\right)$$

שכן

$$S\left(t_2,t_0\right)u_0=u\left(t_2\right)=S\left(t_2,t_1\right)u\left(t_1\right)=S\left(t_2,t_1\right)S\left(t_1,t_0\right)u_0$$

וזאת לכל $u_0\in\mathbb{R}^n$.

כעת, נפתור את הבעיה הלא הומוגנית בהינתן $S\left(t,t_0\right)$. הבעיה היא

$$\begin{aligned}v'\left(t\right)&=L\left(t\right)v\left(t\right)+g\\ v\left(t_0\right)&=v_0\end{aligned}$$

משפט 2.1 (עקרון דוהמל)

$$v\left(t\right)=S\left(t,t_0\right)v_0+\int\limits_{t_0}^{t}S\left(t,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau$$

הערה 2.2 נניח כי קיים $T>0$ עם $g\left(t\right)=0$ לכל $t\notin\left[0,T\right]$. נסתכל על הפתרון עבור $t>T$:

$$v\left(t\right)=S\left(t,t_0\right)v_0+\int\limits_{0}^{T}S\left(t,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau$$

קיבלנו "סכום" של פתרונות מתנאי התחלה שונים: $t_0\to v_0$ ובכל $t\in\left[0,T\right]$: $t\to g\left(t\right)$.

הוכחה: (של עקרון דוהמל) המשפט נכון רק אם יש יחידות לפתרון - כלומר אם $L\left(t\right)$ רציף. נגזור:

$$\begin{aligned}v_t&=S_tv_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{t_0}^{t}S\left(t,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau=\\ &=L\left(t\right)Sv_0+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial S\left(t,\tau\right)}{\partial t}g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau+S\left(t,t\right)g\left(t\right)=\\ &=L\left(t\right)Sv_0+\int\limits_{t_0}^{t}L\left(t\right)S\left(t,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{Id}g\left(t\right)=\\ &=L\left(t\right)\left(S\left(t,t_0\right)v_0+\int\limits_{t_0}^{t}S\left(t,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau\right)+g\left(t\right)=\\ &=L\left(t\right)v\left(t\right)+g\left(t\right)\end{aligned}$$

ולכן המשוואה אכן מתקיימת. נותר להראות קיום תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} v\left(t_0\right) &= S\left(t_0,t_0\right)v_0+\int\limits_{t_0}^{t_0} S\left(t_0,\tau\right)g\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau= \\ &= \mathrm{Id}v_0+0=v_0 \end{aligned}$$

ולכן סיימנו. ■

3 טרנספורם לפלאס

נניח שנותנים לנו חידה בסינית, ודורשים מאיתנו פתרון בסינית. אם אנחנו יודעים סינית, יופי. אחרת, אנחנו צריכים עזרה משלושה אנשים - מתורגמן סינית־עברית, שנותן לנו חידה בעברית; פותר חידות בעברית, שנותן לנו פתרון בעברית; ומתורגמן עברית־סינית, שנותן לנו פתרון בסינית. באופן דומה, נניח שיש לנו משוואה דיפרנציאלית במשתנה t, ונרצה לפתור אותה במשתנה t. אם נצליח לבצע לה "אינטגרציה", באחת מהשיטות שלמדנו, יופי. אחרת, נתרגם אותה לבעיה אלגברית במשתנה s על ידי טרנספורם לפלאס, שאותה נפתור פתרון אלגברי ונקבל פתרון במשתנה s, ונתרגם אותו בחזרה לפתרון במשתנה t בעזרת טרנספורם לפלאס ההפוך.

הטרנספורם

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]=F\left(s\right):=\int\limits_0^\infty e^{-st}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה

$$\begin{aligned} &f\left(t\right)=1 \\ &F\left(s\right)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M e^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{M\to\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\,\Big|_0^M= \\ &\qquad=\lim_{M\to\infty}1-\frac{e^{-sM}}{s} \end{aligned}$$

כאשר $s<0$ זה מתבדר, ועבור $s>0$ מתקיים $F\left(s\right)=\frac{1}{s}$.

הגדרה 3.1 $f\left(t\right)$ תיקרא רציפה למקוטעין בקטע $\left[a,b\right]$ אם קיימת חלוקה למספר סופי של תתי קטעים, כך שבפנים של כל קטע f רציפה, ויש לה גבולות סופיים בקצוות.

משפט 3.2 אם f רציפה למקוטעין בכל קטע $\left[0,T\right]$, וכן הגבול של f כאשר $t\to\infty$ הוא לכל היותר אקספוננציאלי, משמע קיימים קבועים k,a,M עם

$$\left|f\left(t\right)\right|\le ke^{at}$$

לכל $t \geq M$, אזי טרנספורם לפלאס מוגדר היטב לכל $s > a$.

הוכחה: נראה שעבור $s > a$, $\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(s\right)$ מתכנס. נוכל לכתוב

$$\int_0^\infty e^{-st} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^M e^{-st} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t + \int_M^\infty e^{-st} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

האינטגרל הראשון כמובן חסום - אינטגרל של פונקציה חסומה ואינטגרבילית על קטע סופי. נבדוק את האינטגרל השני:

$$\left|\int_M^\infty e^{-st} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_M^\infty \left|e^{-st} f\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_M^\infty e^{-st} k e^{at}\,\mathrm{d}t = k\int_M^\infty e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{A\to\infty} k\int_M^A e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} k\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\,\Big|_M^A$$

וגבול זה מתכנס אם ורק אם $s > a$. לכן בפרט כאשר $s > a$ קיבלנו שהאינטגרל הזה חסום, וסיימנו. ■

תרגיל (בלי הוכחה) $\mathcal{L}$ לינארי בתחום הגדרתו, משמע

$$\mathcal{L}\left(f+g\right) = \mathcal{L}\left(f\right) + \mathcal{L}\left(g\right)$$
$$\mathcal{L}\left(\alpha f\right) = \alpha\mathcal{L}\left(f\right)$$

הערה 3.3 באופן כללי, s עשוי להיות מרוכב!

בנוסף, באופן כללי, מתקיים

$$\mathcal{L}\left(e^{ibt}\right) = \frac{1}{s-ib}$$

ואת זה נראה מחר. מכאן יש מסקנה.

מסקנה 3.4

$$\mathcal{L}\left(\cos\left(bt\right)\right) = \frac{s}{s^2+b^2}$$
$$\mathcal{L}\left(\sin\left(bt\right)\right) = \frac{b}{s^2+b^2}$$

הוכחה:

$$\mathcal{L}\left(\cos\left(bt\right) + i\sin\left(bt\right)\right) = \mathcal{L}\left(e^{ibt}\right) = \frac{1}{s-ib} = \frac{s+ib}{s^2+b^2}$$

כעת נוכל להשוות חלקים ממשיים ומדומים (בעזרת לינאריות) ולקבל את המסקנה. ■