משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ארזים ©

16 במרץ 2017

1 משפט קיום ויחידות עבור משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

הבעיה היא

$$y' + p(x)y = g(x)$$
$$y(x_0) = y_0$$

האם תמיד קיים פתרון? האם קיים יותר מפתרון אחד? האם הפתרון תקף לכל x, או רק בקטע סביב x_0?

משפט 1.1 אם הפונקציות $p(x)$, $g(x)$ רציפות בקטע $\alpha < x < \beta$ המכיל את x_0, אזי לכל y_0 קיים פתרון יחיד $y(x)$ המקיים את המשוואה בקטע.

הוכחה: ראשית, עבור קיום פיתרון, הוכחנו בשיעור שעבר - חישבנו פתרון אפשרי אחד. כל עוד $p(x), g(x)$ רציפות, הפתרון שמצאנו מוגדר היטב וגזיר. נותר לבדוק את יחידות הפתרון.

דרך ראשונה: נובעת מהחישוב שעשינו. התחלנו עם $y' + py = g$, וכפלנו בגורם אינטגרציה $h(x)$, עד שקיבלנו פתרון מסויים. העניין הוא שאפשר ללכת בכיוון השני - ולכן כל המעברים הם של "אם ורק אם". לכן לא ייתכן עוד פתרון.

דרך שנייה: דרך זו לא תלויה בידיעת הפתרון. נניח שקיימים שני פתרונות שונים, $y_1(x), y_2(x)$. נגדיר

$$u(x) = y_1 - y_2$$

אזי, אם נציב את u במשוואה שהתחלנו איתה,

$$u' + p(x)u = 0$$
$$u(x_0) = 0$$

נרצה להראות שמכאן נובע כי $u = 0$. נכפיל בגורם האינטגרציה $e^{\int^x p}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ue^{\int^x p}\right) = 0$$
$$ue^{\int^x p} = c$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$c \equiv 0$$

גורם האינטגרציה אינו 0 בשום מקום, ולכן כדי שיתקיים

$$ue^{\int^x p} = 0$$

חייב להתקיים $u \equiv 0$, כלומר $y_1 \equiv y_2$ והוכחנו את היחידות. ■

נשים לב שבמקרה של משוואה דיפרנציאלית רגילה לינארית, ייתכן שהפתרון לא יהיה קיים לכל x, אם p, g לא רציפות בנקודות כלשהן. במקרה זה ניתן לזהות ישירות מהמשוואה את הנקודות בהן הפתרון עלול להישבר.

דוגמא

$$y' = \frac{1}{x^2}$$
$$y(1) = 1$$

נפתור

$$y = -\frac{1}{x} + c$$

ונקבל על ידי הצבת תנאי ההתחלה כי

$$y = -\frac{1}{x} + 2$$

הפתרון לא עובד בנקודה $x = 0$ - שזה בדיוק היכן שהפונקציה g לא רציפה.

2 שיטות לפתרון משוואה דיפרנציאלית רגילה לא לינארית מסדר ראשון

2.1 הפרדת משתנים

הגדרה 2.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון תקרא מופרדת אם היא מהצורה

$$y'(x) = a(x)\,b(y)$$

ולא מופרדת אחרת.

נכתוב משוואה דיפרנציאלית רגילה בצורה

$$y' = -\frac{M(x)}{N(y)}$$

$$M(x) + N(y)\, y' = 0$$

$$\int^{x} M(s)\ \mathrm{d}s + \int^{x} N(y(x))\, y'(x)\ \mathrm{d}x = c$$

$$\int^{x} M(s)\ \mathrm{d}s + \int^{y(x)} N(\tilde{y})\ \mathrm{d}\tilde{y} = c$$

נניח כי נתון בנוסף

$$y(x_0) = y_0$$

אזי

$$\int_{x_0}^{x} M(\tilde{x})\ \mathrm{d}\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} N(\tilde{y})\ \mathrm{d}\tilde{y} = c$$

בכל העבודה הזו, לקחנו $N(y) = \frac{1}{b(y)}$ - זה אפשרי רק כאשר $b(y) \neq 0$.
אם קיים α עבורו $b(\alpha) = 0$, נקבל כי

$$y'(\alpha) = 0$$

ולכן במקרה הזה נקבל כי $y(x) \equiv \alpha$ פתרון <u>סטציונרי</u>. לעתים פתרון זה נקרא <u>סינגולרי</u>.
הרבה פעמים כותבים ופותרים כך:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{M(x)}{N(y)}$$

$$M(x)\,\mathrm{d}x + N(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\int M(x)\ \mathrm{d}x + \int N(y)\ \mathrm{d}y$$

הצורה שרשמנו כאן סימטרית עבור x, y, ולכן ניתן גם לכתוב

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{N(y)}{M(x)} = \frac{1}{a(x)\, b(y)}$$

לפעמים נוח יותר לפתור כך. בנוסף, אם קיים $x = \beta$ עבורו $\frac{1}{M(\beta)} = \frac{1}{a(\beta)} = 0$ אזי $x \equiv \beta$ גם פתרון סטציונרי.

דוגמא

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x}{y}\\ y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x &= 0\\ \int y\,\mathrm{d}y + \int x\,\mathrm{d}x &= c\\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} &= c\\ x^2 + y^2 &= \tilde{c}\end{aligned}$$

האם קיימים פתרונות סטציונריים? לא, כי אגף ימין לא מתאפס עבור אף ערך y.