משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

7 ביוני 2017

1 מערכות של משוואות לינאריות

דיברנו על פתרון מערכות בצורה $x'(t) = Ax$ וראינו שאם r הוא ערך עצמי של הווקטור ξ אזי $x = e^{rt}\xi$ פתרון.

דוגמא ניקח

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

נכתוב $x' = Ax$ כאשר $x = (x_1, x_2)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. מוצאים ווקטורים וערכים עצמיים

$$\begin{aligned} &r_1 = 3, r_2 = -1 \\ &\xi_1 = (1,2)^T, \xi_2 = (1,-2)^T \end{aligned}$$

אפשר לוודא בעזרת הוורונסקיאן שאכן הפתרונות בלתי תלויים. הפתרון הכללי הוא

$$x = c_1 e^{3t}\xi_1 + c_2 e^{-t}\xi_2$$

נחזור למקרה הכללי. יש לנו $x' = Ax$, כאשר A ממימד n. נרצה פתרונות מהצורה $x = e^{rt}\xi$. נציב ונקבל

$$r\xi = A\xi$$

למציאת ערכים עצמיים נתבונן בפולינום האופייני

$$\det(A - rI) = 0$$

הפולינום האופייני הוא ממעלה n. יש לו שורשים $r_1, \ldots, r_n$, לאו דווקא שונים זה מזה. סוג הפתרון של המשוואה יהיה תלוי באופי הערכים הצעמיים והווקטורים העצמיים.

1.1 צורות פתרון

1.1.1 מקרה ראשון - מטריצה הרמיטית $A=\overline{A}^t=A^*$

ניזכר שבמצב זה כל הערכים העצמיים הם ממשיים. כמו כן, תמיד קיימים n ווקטורים עצמיים בלתי תלויים (גם אם יש ערכים עצמיים שחוזרים על עצמם). לכן, אם A הרמיטית, קיימים $r_1,\ldots,r_n$ וכן ווקטורים עצמיים מתאימים $\xi_1,\ldots,\xi_n$ ולכן יש לנו את הפתרונות $x_i\left(t\right)=e^{r_it}\xi_i$. נבדוק שהם קבוצה יסודית.

$$W\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left|\left(e^{r_it}\xi_i\right)_{i=1}^n\right|=e^{\left(r_1+\cdots+r_n\right)t}\left|\left(\xi_i\right)_{i=1}^n\right|\neq0$$

כי הווקטורים העצמיים בלתי תלויים. לכן הפתרון הכללי הוא

$$x=\sum_{i=1}^n\alpha_ie^{r_it}\xi_i$$

אם המטריצה ממשית, אז אנחנו יודעים אפילו שהווקטורים העצמיים ממשיים. אחרת ייתכן שהם מרוכבים.

1.1.2 מקרה שני - קיימים n ערכים עצמיים ממשיים פשוטים

במקרה זה צורת הפתרון היא עדיין

$$x\left(t\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_ie^{r_it}\xi_i$$

1.1.3 מקרה שלישי - n ערכים עצמיים שונים, חלקם מרוכבים

A ממשית לא הרמיטית בעלת n ערכים עצמיים שונים, וחלקם מרוכבים. במקרה זה עדיין ניתן לרשום את הפתרון הכללי בצורה הקודמת עם r_i מרוכבים. נראה איך להוציא מזה פתרונות ממשיים. ניזכר שאם A ממשית, r_1 ערך עצמי מרוכב עם ווקטור עצמי ξ_1, אזי $\overline{r_1}$ ערך עצמי עם ווקטור עצמי $\overline{\xi_1}$. לכן, יש לנו שני פתרונות בצורה הקודמת שהם צמודים. בעזרת נוכל לגדיר שני פתרונות ממשיים:

$$\frac{x_1+\overline{x_1}}{2},\frac{x_1-\overline{x_1}}{2i}$$

אלה פורשים את אותו מרחב כמו $x_1,\overline{x_1}$, ולכן לא משנים את המרחב. הם כבר לא מהצורה ξe^{rt} - אם נכתוב $r_1=\lambda+i\mu$, $\xi_1=a+ib$, אזי

$$x_1=\xi_1e^{r_1t}=\xi_1e^{\lambda}\left(\cos\left(\mu x\right)+i\sin\left(\mu x\right)\right)$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\overline{x_1}}{2}&=e^{\lambda}\left(a\sin\left(\mu t\right)+b\cos\left(\mu t\right)\right)\\\frac{x_1-\overline{x_1}}{2i}&=e^{\lambda}\left(-b\sin\left(\mu t\right)+a\cos\left(\mu t\right)\right)\end{aligned}$$

1.1.4 מקרה רביעי ־ המרטיצה לא לכסינה

קיימים ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי (דרגה בפולינום האופייני) גדול מריבוי גיאומטרי (מספר ווקטורים עצמיים בלתי תלויים). נתחיל עם $n = 2$. בהכרח יש לה ערך עצמי כפול, כי אחרת היא הייתה לכסינה. נקרא לערך העצמי r ולווקטור העצמי היחיד שלו u_1. נשים לב שמתקיים $(A - rI)\,u_1 = 0$, במקרה זה קיים ווקטור עצמי מוכלל u_2 עם

$$(A - rI)\,u_2 = u_1$$

ולכן

$$(A - rI)^2\,u_2 = 0$$

לכן נקבל כי

$$A\,(u_1, u_2) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

נסמן $T = (u_1, u_2)$. מתקיים

$$AT = TD$$

עבור D המשולשית. אנחנו פותרים את

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ T^{-1}x' &= T^{-1}Ax \\ y' &= Dy \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת עבור y:

$$\begin{aligned} y_1' &= ry_1 + y_2 \\ y_2' &= ry_2 \end{aligned}$$

נקבל בהכרח $y_2 = c_1e^{rt}$, וכן $y_1 = c_2e^{rt} + c_1te^{rt}$. לכן נקבל שני פתרונו תבלתי תלויים:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{rt}\,(t, 1)^T \\ y_2 &= e^{rt}\,(1, 0)^T \end{aligned}$$

נחזור למערכת המקורית ונקבל

$$\begin{aligned} x_1 &= Ty_1 = (u_1, u_2)\,(t, 1)^T\,e^{rt} = u_1te^{rt} + u_2e^{rt} \\ x_2 &= Ty_2 = (u_1, u_2)\,(1, 0)^T\,e^{rt} = u_1e^{rt} \end{aligned}$$

באופן דומה עבור A ממימד 3 עם ערך עצמיד יחיד r, ניקח $(A - rI)\,u_1 = 0$, $(A - rI)\,u_2 = u_1$, $(A - rI)\,u_3 = u_2$. $T = (u_1, u_2, u_3)$, ואז

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל (בדקו)

$$\begin{aligned}
y_1' &= ry_1 + y_2\\
y_2' &= ry_2 + y_3\\
y_3' &= ry_3
\end{aligned}$$

ומכאן נקבל

$$\begin{aligned}
y_3 &= c_1 e^{rt}\\
y_2 &= c_2 e^{rt} + c_1 t e^{rt}\\
y_1 &= c_3 e^{rt} + c_2 t e^{r_1 t} + c_1 \frac{t^2}{2} e^{rt}
\end{aligned}$$

ולכן נקבל פתרונות

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 e^{rt}\\
x_2 &= u_1 t e^{rt} + u_2 e^{rt}\\
x_3 &= u_1 \frac{t^2}{2} e^{rt} + u_2 t e^{rt} + u_3 e^{rt}
\end{aligned}$$

ההכללה לריבוי אלגברי גדול יותר עם ריבוי גיאומטרי 1 היא ברורה, ואז במטריצה כללית נעבוד בכל בלוק בנפרד.

2 מערכת לא הומוגנית

כעת המשוואה היא

$$x'(t) = P(t)\,x(t) + g(t)$$

כאשר x, g ווקטורים, P מטריצה.

2.1 שיטת ווריאציית הפרמטרים

נניח שידוע מערכת יסודית $x_1, \ldots, x_n$ של המשוואה $x' = Px$. נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$x_p = \sum c_i(t)\,x_i(t)$$

כאשר c_i הן פונקציות סקלריות. מכאן נקבל

$$x_p' = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\,x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,x_i'(t)$$

כמו כן

$$Px_p + g = P\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) + g = \sum_{i=1}^{n} c_i P x_i + g = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i' + g$$

נשאר לנו לדרוש רק

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' x_i = g$$

יש לנו כאן n נעלמים (c_i'), n משוואות, ויש פתרון יחיד כי הדטרמיננטה של המערכת היא בדיוק הוורונסקיאן, והפתרונות בלתי תלויים.

2.2 שיטת הלכסון

ניקח $x' = Ax + g$ מערכת, כאשר A קבועה ולכסינה. $A = TDT^{-1}$, כאשר $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. כעת

$$\begin{aligned} x' &= Ax + g \\ T^{-1}x' &= DT^{-1}x + T^{-1}g \\ y' &= Dy + T^{-1}g \end{aligned}$$

כלומר

$$y_i' = \lambda_i y_i + \left(T^{-1}g\right)_i$$

קיבלנו n מדרים מסדר ראשון שלא קשורים זה לזה. את זה אנחנו יודעים לפתור. אם A לא לכסינה, מקבלים שיטה דומה על ידי שימוש בצורת ז'ורדן. יש גם שיטת מקדמים לא ידועים, אבל לא ניכנס אליה.

3 משוואה מטריציאלית

נתבונן במשוואה $x' = P(t)\,x$. ראינו שקיימים n פתרונות בלתי תלויים x_i. נסמן

$$\Psi = (x_1, \ldots, x_n)$$

טענה 3.1

$$\Psi' = P\psi$$

הוכחה: על ידי התבוננות בעמודה i, השוויון מתורגם להיות

$$x_i' = Px_i$$

וזה מההנחה. ■

נבחר את הווקטורים x_i על ידי $x_i(0) = e_i$. לכן

$$\Psi(t=0) = I$$

לכן $\Psi(t)$ הוא הפתרון של המערכת שמקיים את תנאי ההתחלה הזה. כעת, נתבונן בפתרון של המערכת שמקיים את תנאי ההתחלה $x(0) = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$. מיחידות הפתרון נקבל

$$x(t) = \sum x_j^0 x_j(t) = \Psi(x_0)$$

מסקנה 3.2 יהיו $\{x_i(t)\}$ פתרונות של המשוואה שמקיימים $x_j(0) = e_j$, ותהי $\Psi = (x_1, \ldots, x_n)$. אזי הפתרון של המערכת שמקיים את תנאי ההתחלה $x(0) = x_0$ הוא

$$x(t) = \Psi(t)\, x_0$$