משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

24 במאי 2017

1 פתרון משוואות באמצעות טורים

ראינו שיטה למצוא פתרון על ידי הצבה. אנחנו רוצים לבדוק האם השיטה תמיד עובדת, כלומר:

1. האם התמיד ניתן לחשב את a_n?
2. האם הטור המתקבל הוא מתכנס?
3. האם זה באמת הפתרון של המשוואה? כן, כי מותר לגזור טור חזקות איבר איבר בתחום בו הוא מתכנס.

נתחיל עם 1. ראשית ניזכר כי כשמנחשים פתרון

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

אזי

$$a_n=\frac{y^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$$

לכן, אם נוכל לחשב את $y^{(n)}\left(x_0\right)$ נוכל לחשב את a_n. ניקח את המשוואה

$$P\left(x\right)y''+Q\left(x\right)y'+R\left(x\right)y=0$$

כאשר x_0 נקודה רגולרית, משמע $P\left(x_0\right)\neq 0$. הפונקציה P רציפה, ולכן $P\left(x\right)\neq 0$ עבור x בסביבת x_0. לכן נוכל לחלק בה ולקבל

$$y''+\frac{Q\left(x\right)}{P\left(x\right)}y'+\frac{R\left(x\right)}{P\left(x\right)}y=0$$

נסמן כעת $p=\frac{Q}{P},q=\frac{R}{P}$ ואלה מוגדרות היטב סביב x_0. קיבלנו את

$$\begin{aligned}y''\left(x\right)&=-p\left(x\right)y'-q\left(x\right)y\\2!\cdot a_2=y''\left(x_0\right)&=-p\left(x_0\right)y'\left(x_0\right)-q\left(x_0\right)y\left(x_0\right)=-p\left(x_0\right)a_1-q\left(x_0\right)a_0\end{aligned}$$

ולכן נוכל לחשב את a_2. אם נגזור שוב נקבל

$$y'''(x) = -py'' - p'y' - qy' - q'y$$

ולמצוא כך את a_3 לפי a_0, a_1, a_2. נמשיך באינדוקציה ונוכל לחשב את כל המקדמים. לכן בהינתן $y(x_0), y'(x_0)$ נוכל לחשב באופן חד משמעי את a_n עבור $n \geq 2$, בתנאי שהפונקציות p, q גזירות אינסוף פעמים. אבל מה לגבי התכנסות הטור?

הגדרה 1.1 פונקציה $f(x)$ נקראת אנליטית בנקודה x_0 אם היא גזירה שם אינסוף פעמים, וכן לטור החזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

יש רדיוס התכנסות חיובי ממש.

כל הפונקציות האנליטיות וצירופיהן אנליטיים בתחום ההגדרה. בנוסף רדיוס ההתכנסות של פונקציה אנליטית הוא המרחק לנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר. למשל, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ אנליטית בנקודה 0 ורדיוס ההתכנסות הוא 1 - המרחק עד הנקודה הסינגולרית הראשונה. כך גם עבור $\frac{1}{1+x^2}$ - המרחק לנקודה הסינגולרית הוא 1, פשוט לא על הציר הממשי. צריך לבחור נקודות סינגולריות בכל $\mathbb{C}$ כדי להחליט על רדיוס התכנסות.

משפט 1.2 תהי x_0 נקודה רגולרית של $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, ונגדיר $p = \frac{Q}{P}, q = \frac{R}{P}$. אם שניהם אנליטיים בנקודה x_0, אזי הפתרון הכללי של המשוואה ניתן לכתיב בתור

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

כאשר a_1, a_2 שרירותיים, y_1, y_2 פונקציות אנליטיות בנקודה x_0 שהם בלתי תלויות לינארית. בנוסף, רדיוס ההתכנסות של y_1, y_2 הוא לפחות רדיוס ההתכנסות של p, q. המקדמים $\{a_n\}$ מתקבלים על ידי הצבת הטור במשוואה והשוואת מקדמים.

דוגמא נפתור את $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, עבור α קבוע. נרצה למצוא רדיוס התכנסות סביב 0 של פתרון שהוא טור חזקות. x_0 נקודה רגולרית, ולכן נוכל לחלק:

$$y'' - \frac{2x}{1 + x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 + x^2}y = 0$$

בכתיבה זו אנחנו רואים שהפונקציות p, q נהיות סינגולריות בנקודות $\pm i$, ולכן רדיוס ההתכנסות סביב 0 הוא 1.

מה קורה בנקודות סינגולריות - נקודות בהן $P(x_0) = 0$? אם הנקודה "קצת" סינגולרית, עדייו אפשר לפתור בעזרת טורים, אבל מעט שונים:

$$x^r \sum a_n x^n$$

כאשר ייתכן כי $r < 0$.

אם הנקודות הן "הרבה סינגולריות" אין פתרון בעזרת טורים. לפעמים יש פתרון אבל הוא מתבדר.

2 מערכות של משוואות מסדר ראשון

ראינו כבר בעבר שמשוואה מסדר n אפשר להעביר למערכת של n משוואות מסדר ראשון.

דוגמא מערכת טורף נטרף. יש כמות זברות $x\left(t\right)$ וכמות אריות $y\left(x\right)$. אם יש רק זברות, בהנחה שאין אילוצים של הגבלת מקום, מזון וכאלה, הגיוני להניח כי

$$x'=kx$$

אם יש רק אריות, האריות מתים, כי אין להם מה לאכול:

$$y'=-ry$$

כעתת נניח שיש משניהם. נניח שההסתברות של כל זברה להיטרף היא פרופורציונית למספר האריות:

$$x'\left(t\right)=kx-axy$$

כאשר $k,a>0$. באופן דומה, בנוכחות אוכל, הסיכוי לאריות להתרבות פרופורציוני למספר הזברות:

$$y'=-ry+bxy$$

קיבלנו מערכת:

$$\begin{aligned}x'&=kx-axy\\y'&=-ry+bxy\end{aligned}$$

זה נקרה מודל לוטקה־וולטרה.

כעת, נדבר על מערכת כללית של משוואות מסדר ראשון.

הגדרה 2.1 למערכת של משוואות

$$x_i'=f\left(t,x_1,\ldots,x_n\right)$$

יש פתרון בקטע הפתוח I אם קיימות n פונקציות $x_1,\ldots,x_n$ שהם גזירות בקטע I ומקיימות את המערכת.

ניקח גם n תנאי התחלה:

$$x_i\left(t_0\right)=x_i^0$$

ראינו בעבר שכעת יש משפט קיום ויחידות רגיל של פיקארדת שאפשר להכליל למערכת.

הגדרה 2.2 מערכת תקרא לינארית הפונקציות f_i הן קומבינציות לינאריות של $x_1,\ldots,x_n$.

משפט 2.3 במצב זה, אם כל המקדמים בצירופים הלינאריים רציפות בקטע הפתוח I המכיל את t_0, אז קיים פתרון יחיד למערכת שמקיים את תנאי ההתחלה בקטע.

סימונים אנחנו נעבוד בסימונים ווקטוריים ומטריציוניים. יש לנו המערכת

$$x_i' = g_i + \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j$$

עם תנאי ההתחלה

$$x_i\left(t_0\right) = x_i^0$$

נסמן כעת

$$\begin{aligned} \underline{x}\left(t\right) &= \left(x_i\left(t\right)\right)_{i=1}^{n} \\ \underline{\underline{P}}\left(t\right) &= \left(p_{i,j}\left(t\right)\right)_{i,j=1}^{n} \\ \underline{g}\left(t\right) &= \left(g_i\left(t\right)\right)_{i=1}^{n} \\ \underline{x}'\left(t\right) &= \left(x_i'\left(t\right)\right)_{i=1}^{n} \end{aligned}$$

ואז המערכת היא

$$\underline{x}' = \underline{g} + \underline{\underline{P}}\underline{x}$$

כתיבה זו תמציתית יותר ונוכל להפעיל בעזרת כלים של אלגברה לינארית.

ראשית נדבר על מערכת הומוגנית, כלומר כזו שמתקיים בה

$$\underline{g} = \underline{0}$$

משפט 2.4 אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא מרחב ווקטורי, כלומר אם $\underline{x}^1, \underline{x}^2$ פתרונות אז גם $c_1\underline{x}^1 + c_2\underline{x}^2$ פתרון.

הוכחה: תרגיל (קל). ■

הגדרה 2.5 הפונקציות הווקטוריות $\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^k$ הן בלתי תלויות לינארית בקטע I אם כל צירוף לינארי שלהן שמתאפס

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i = \underline{0}$$

הוא טריוויאלי, כלומר $c_i = 0$ לכל i.

למה 2.6 יהיו $\left\{\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^k\right\}$ פתרונות של המערכת שלנו בקטע I. אזי הפונקציות הללו בלתי תלויות לינארית בקטע I אם ורק אם קיים $t_0 \in I$ שעבורו הווקטורים $\left\{\underline{x}^1\left(t_0\right), \ldots, \underline{x}^k\left(t_0\right)\right\}$ תלויים לינארית.

הוכחה: ברור שאם הפונקציות תלויות לינארית בקטע אז יש תלות בכל נקודה. נותר להוכיח את הכיוון השני. מההנחה, קיימים קבועים שאינם כולם אפס המקיימים

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i (t_0) = \underline{0}$$

נגדיר

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \underline{x}^i (t)$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל כי $\underline{x}(t)$ פתרון של המערכת הלינארית ההומוגנית, שמקיים $\underline{x}(t_0) = 0$. מיחידות הפתרון למערכות לינאריות נובע כי $\underline{x}(t) = 0$ לכל t, ועל כן סיימנו. ■

למה 2.7 מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא n.

הוכחה: נסמן e_j את ווקטור הבסיס הסטנדרטי מספר j (כלומר 1 בקואורדינטה j ואפס באחרות). יהי $t_0 \in I$, ויהי $x^{(j)}(t)$ הפתרון של המערכת ההומוגנית שמקיים $x^{(j)}(t_0) = e_j$. אלה בלתי תלויים, ולכן נובעשגם הפתרונות $x^j(t)$ בלתי תלויים, מהלמה הקודמת. כמו כן, נראה שהם פורשים את מרחב הפתרונות. יהי $x(t)$ פתרון. נסמן $x(t_0) = (c_i)_{i=1}^n$, ואז יתקיים

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)}(t)$$

וזאת משום ששני האגפים הם פתרונות שמקיימים את אותו תנאי התחלה בנקודה t_0, ולכן ממשפט קיום ויחידות הם מזדהים לכל t. ■

כמובן שמהלמה הזו נובע שכל אוסף של n פתרונות בלתי תלויים פורשים את מרחב הפתרונות.

הגדרה 2.8 קבוצה כזו תקרא מערכת בסיסית. אם היא מקיימת $x^{(i)}(t) = e_i$ היא תקרא מערכת בסיסית יסודית.

הגדרה 2.9 נגדיר את הוורונסקיאן של קבוצת הפתרונות $\left\{x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right\}$ להיות

$$W\left(x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) := \det\left(x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = W(t)$$