משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

21 במאי 2017

1 פתרון משוואות בעזרת טורים

דוגמא ננסה לפתור את $y''+y=0$ בעזרת טורים. נחפש פתרון מהצורה

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

נניח שיש לטור זה רדיוס התכנסות $\rho>0$. כלומר הטור מתכנס עבור $|x|<\rho$, ומתבדר עבור $\rho=|x|$. עבור טור חזקות מותר להחליף גזירה וסכום ולכן

$$\begin{aligned}
y'\left(x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_{n}x^{n-1}\\
y''\left(x\right) &= \sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_{n}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^{n}
\end{aligned}$$

כעת המשוואה היא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n}+a_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)\right)x^{n+2}=0$$

נצטרך שכל המקדמים יתאפסו. נקבל

$$a_{n+2}=-\frac{a_{n}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

קיבלנו שתי דרגות חופש: a_{0},a_{1}. כמובן שהקשר מוגדר היטב כי לא מחלקים באפס (אסור). נשים לב שכלל הרקורסיה יכול להיות מוצג גם בתור

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \left(-1\right)^{k}\frac{a_{0}}{(2k)!}\\
a_{2k+1} &= \left(-1\right)^{k}\frac{a_{1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

כעת:

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \\
&= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&= a_0 \cos x + a_1 \sin x
\end{aligned}
$$

כמו שהיינו מצפים.

נשים לב שמתקיים

$$a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$$

נשים לב שלמשל עבור $\sin x$, ממבחן המנה הטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.

דוגמא משוואת איירי:

$$y''(x) = xy$$

כאן $p(x) \equiv 1$, ולכן כל נקודה x_0 רגולרית. נחפש פתרון סביב 0. נסמן

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}
\end{aligned}
$$

נציב ונקבל

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}\right) x^n = 0$$

כלומר נסיק כי $a_2 = 0$, וכן

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$$

קיבלנו שתי דרגות חופש - a_0, a_1 (כי $a_2 = 0$ בהכרח). נקבל נוסחאות סגורות:

$$
\begin{aligned}
a_{3k} &= \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) 3k} \\
a_{3k+1} &= \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3k (3k+1)} \\
a_{3k+2} &= 0
\end{aligned}
$$

אם כן, נקבל

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} = \\ &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k}}{a_0} x^{3k}\right) + a_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k+1}}{a_1} x^{3k+1}\right) \end{aligned}$$

נבדוק רדיוס התכנסות על ידי מבחן המנה ונקבל $\rho = \infty$. הוורסונקיאן ירה לנו שאלה פתרונות בלתי תלויים, ולכן סיימנו לפתור.