משוואות דיפרנציאליות רגילות

© ארזים

17 במאי 2017

1 שיטות למציאת פיתרון פרטי של משוואה ליאנרית לא הומוגנית

משוואת ריקטי היא

$$y'\left(x\right)=q_{0}\left(x\right)+q_{1}\left(x\right)y+q_{2}\left(x\right)y^{2}$$

זו משוואה מסדר ראשון שאינה לינארית. נשתמש בהצבת אויילר:

$$y\left(x\right)=-\frac{v'\left(x\right)}{q_{2}v\left(x\right)}$$

ומקבלים אז

$$v''\left(x\right)-v'\left(x\right)\left(\frac{q_{2}'}{q_{2}}+q_{1}\right)+q_{0}q_{2}v=0$$

זו משוואה לינארית מסדר 2, וברוב המקרים המקדמים שלה לא קבועים.

1.1 שיטת וריאציית הפרמטרים

המשוואה שפותרים היא

$$y''+py'+qy=g$$

כאשר ידועים 2 פתרונות בלתי תלויים u_{1},u_{2} של המשוואה ההומוגנית המתאימה. בניגוד לשיטת המקדמים הלא ידועים, שיטה זו עובדת גם כאשר p,q פונקציות של x.

תזכורת פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית הוא

$$y=c_{1}u_{1}+c_{2}u_{2}$$

כאשר c_{1},c_{2} קבועים.

בשיטת וריאציית הפרמטרים נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y\left(x\right)=c_{1}\left(x\right)u_{1}\left(x\right)+c_{2}\left(x\right)u_{2}\left(x\right)$$

כלומר אנחנו נותנים גם למקדמים להיות פונקציות של x. תמיד קיימים c_1, c_2 כאלה, למשל

$$c_1\left(x\right)=\frac{y_p\left(x\right)}{u_1\left(x\right)}, c_2\left(x\right)=0$$

יש לנו 2 דרגות חופש, ורק אילוץ אחד - לפתור את המשוואה. לכן יש לנו בעצם דרגת חופש אחת. אותה ננצל כדי להכניס אילוץ שיפשט את החישובים. ראשית נגזור:

$$y_p'=c_1'u_1+c_2'u_2+c_1u_1'+c_2u_2'$$

את דרגת החופש שלנו ננצל כדי לדרוש $c_1'u_1+c_2'u_2=0$. נגזור שוב:

$$y_p''=c_1'u_1'+c_2'u_2'+c_1u_1''+c_2u_2''$$

נציב את אלה במשוואה שלנו.

$$\begin{aligned}y_p''+py_p'+qy_p&=\left(c_1'u_1'+c_2'u_2'+c_1u_1''+c_2u_2''\right)+p\left(c_1u_1'+c_2u_2'\right)+q\left(c_1u_1+c_2u_2\right)=g\\&=c_1\left(u_1''+pu_1'+qu_1\right)+c_2\left(u_2''+pu_2'+qu_2\right)+c_1'u_1'+c_2'u_2'=g\end{aligned}$$

לכן c_1, c_2 מקיימים

$$\begin{aligned}c_1'u_1+c_2'u_2&=0\\c_1'u_1'+c_2u_2'&=g\end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות לינארית:

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2\\u_1'&u_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\g\end{pmatrix}$$

כלומר מכלל קרמר:

$$\begin{aligned}c_1'&=\frac{-u_2g}{W\left(u_1,u_2\right)}\\c_2'&=\frac{u_1g}{W\left(u_1,u_2\right)}\end{aligned}$$

לכן קיבלנו:

משפט 1.1 יהיו p, q, g פונקציות רציפות בקטע, ויהי $\{u_1, u_2\}$ פתרונות בלתי תלויים של המערכת ההומוגנית. אזי פתרון פרטי של המערכת נתון על ידי

$$\begin{aligned}y_p\left(x\right)&=-u_1\left(x\right)\int^x\frac{u_2\left(t\right)g\left(t\right)}{W\left(u_1,u_2\right)\left(t\right)}\,\mathrm{d}t+u_2\left(x\right)\int^x\frac{u_1\left(t\right)g\left(t\right)}{W\left(u_1,u_2\right)\left(t\right)}\,\mathrm{d}t=\\&=\int^x\frac{u_2\left(x\right)u_1\left(t\right)-u_1\left(x\right)u_2\left(t\right)}{W\left(u_1,u_2\right)\left(t\right)}g\left(t\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

דוגמא נפתור את

$$y'' + y = f$$

עבור f כללית. 2 הפתרונות הבלתי תלויים הם $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$. הוורונסקיאן הוא

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

נקבל

$$c_1(x) = -\int^x f(t) \sin t \, \mathrm{d}t$$
$$c_2(x) = \int^x f(t) \cos t \, \mathrm{d}t$$

ואז

$$y_p(x) = \int^x f(t) (\sin x \cos t - \sin t \cos x) \, \mathrm{d}t = \int^x f(t) \sin(x - t) \, \mathrm{d}t$$

פתרון פרטי זה הוא מהצורה

$$y_p(x) = \int^x G(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

זה נכון גם עבור המקרה הכללי של המשוואה - קיבלנו עבור

$$y'' + py' + qy = g$$

כי ראינו שהפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = \int^x \frac{u_2(x) u_1(t) - u_1(x) u_2(t)}{W(u_1, u_2)(t)} g(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int^x G(x,t) \cdot g(t) \, \mathrm{d}t$$

טרמינולוגיה: $f(x)$ נקראת אילוץ, $G(x,t)$ נקראת פונקציית גרין, והפתרון

$$y_p(x) = \int^x G(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

הוא תגובה לאילוץ.

למה 1.2 יהי

$$y_p(x)=\int\limits_{x_0}^{x}G(x,t)\,f(t)\;\mathrm{d}t$$

אזי

$$y_p(x_0)=0=y_p'(x_0)$$

הוכחה: ברור כי $y_p(x_0)=0$, כי זה אינטגרל על פונקציות רציפות. כעת,

$$y_p'(x)=G(x,x)\,f(x)+\int\limits_{x_0}^{x}G_x(x,t)\,f(t)\;\mathrm{d}t$$

"אף אחד לא הרשה להחליף גזירה ואינטגרציה" - אחד הסטודנטים.

"זה כי לימדו אתכם מתמטיקאים שימושיים, אני מרשה הכל! נורא ואיום..." - המרצה.

עכשיו מההגדרה

$$G(x,t)=\frac{u_2(x)\,u_1(t)-u_1(x)\,u_2(t)}{W(u_1,u_2)(t)}$$

נקבל $G(x,x)=0$ כלומר

$$y_p'(x)=\int\limits_{x_0}^{x}G_x(x,t)\,f(t)\;\mathrm{d}t$$

וזה אינטגרל על פונקציה רציפה. לכן $y_p'(x_0)=0$.

מסקנה 1.3 כדי לפתור את בעיית תנאי ההתחלה הלא הומוגנית

$$\begin{aligned}y''+py'+qy&=g\\ y(x_0)&=y_0\\ y'(x_0)&=y_0'\end{aligned}$$

פותרים את הבעיה ההומוגנית ומוצאים שני פתרונות בלתי תלויים, ומחשבים את פונקציית גרין $G(x,t)$. מוצאים את הפתרון הפרטי של המשוואה בעזרת פונקציית גרין y_p. מחשבים את התגובה לאילוץ:

$$u_i(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$$

כאשר c_1,c_2 נקבעים לפי תנאי ההתחלה, כך שנקבל u_i שהוא פתרון של המערכת ההומוגנית עם אותם תנאי התחלה. הפתרון של הבעיה כולה הוא

$$y=y_p(x)+u_i(x)$$

דוגמא פתור את $y''+y=f$, כאשר $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

פתרון הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x)=\int\limits_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

זה הפתרון של הבעיה עם תנאי התחלה הומוגניים. הפתרון

$$u_i(x)=\cos x$$

מקיים את תנאי ההתחלה וגם פותר את המשוואה ההומוגנית. כן הפתרון הוא

$$y(x)=\int\limits_0^x \sin(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t+\cos x$$

נסמן

$$L=D^2+pD+q$$

מנסים לפתור את

$$Ly=f$$

נשים לב שמתקיים

$$L[G(x,t)]=0$$

כעת נגדיר עוד אופרטור:

$$T_G(f):=\int\limits_{x_0}^x G(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

ואז נקבל כי

$$f\xrightarrow{T_G}y_p\xrightarrow{L}f$$

ולכן $T_G=L^{-1}$. נחשב ישירות:

$$Ly_p=L\left[\int\limits_{x_0}^x G(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

נגזור

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_{x_0}^{x} G(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t &= \int\limits_{x_0}^{x} G_x(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t + \cancelto{0}{G(x,x)\,f(x)} = \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} G_x(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int\limits_{x_0}^{x} G(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_{x_0}^{x} G_x(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} G_{x,x}(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t + G_x(x,x)\,f(x)\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}Ly_p &= L\left[\int\limits_{x_0}^{x} G(x,t)\,f(t)\ \mathrm{d}t\right] = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\underbrace{L[G(x,t)]}_{0}\ \mathrm{d}t + G_x(x,x)\,f(x) = \\ &= f(x)\end{aligned}$$

וזאת בגלל שמתקיים

$$\begin{aligned}G_x(x,t) &= \frac{u_1(t)\,u_2'(x) - u_2(t)\,u_1'(x)}{u_1(t)\,u_2'(t) - u_1'(t)\,u_2(t)} \\ G_x(x,x) &= 1\end{aligned}$$

ראינו כבר כי עבור $y'' + y = f(x)$ מתקיים $G(x,t) = \sin(x-t)$.

■

למה 1.4 $G(x,t) = -G(x,t)$ אם ורק אם $p = 0$.

ההוכחה תהיה בתרגיל הבית.

למה 1.5 אם המקדמים במשוואה ההומגנית הם קבועים, אזי מתקיים

$$G(x,t) = g(x-t)$$

עבור g כלשהי.

הוכחה: ראשית, נרצה להראות שמספיק לנו להוכיח שלכל y, $G(x+t,t)$ בלתי תלוי במשתנה t. מדוע זה מספיק? כי אם $G(x+t,t) = g(x)$ לכל x,t, אזי נציב $\tilde{x} = x+t$ ונקבל שלכל $\tilde{x},t$ מתקיים

$$G(\tilde{x},t) = g(\tilde{x}-t)$$

נוכיח את מה שמספיק. ניזכור כי

$$G\left(x+t\right)=\frac{u_{1}\left(t\right)u_{2}\left(x+t\right)-u_{2}\left(t\right)u_{1}\left(x+t\right)}{W\left(u_{1},u_{2}\right)\left(t\right)}$$

פונקציה זו מקיימת

$$L\left[G\left(x+t,t\right)\right]=0$$

כמובן, $L\left[u_{i}\left(x\right)\right]=0$, ולכן גם לכל c מתקיים $L\left[u_{i}\left(x+c\right)\right]=0$, ובפרט $L\left[u_{i}\left(x+t\right)\right]=0$. ראינו כי

$$G\left(x+t,t\right)|_{x=0}=G\left(t,t\right)=0$$

כעת, אם נגזור בנקודה לפי x כאשר $x=0$ נקבל

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\left(x+t,t\right)|_{x=0}=\frac{u_{1}\left(t\right)u_{2}'\left(x+t\right)-u_{2}\left(t\right)u_{1}'\left(x+t\right)}{W\left(u_{1},u_{2}\right)\left(t\right)}|_{x=0}=0$$

קיבלנו כי $G\left(x+t,t\right)$ פותרת את המערכת ההומוגנית $Ly=0$ עם תנאי ההתחלה $y\left(0\right)=0$, $y'\left(0\right)=1$. אבל פיתרון כזה הוא יחיד, ולכן לא ייתכן שהפונקציה תלוייה במשתנה t. לכן סיימנו. ■

2 פתרון משוואות מסדר שני הומוגניות בעזרת טורים

נתבונן במשוואה

$$p\left(x\right)y''+q\left(x\right)y'+r\left(r\right)y=0$$

הגדרה 2.1 אם $p\left(x_{0}\right)\neq0$ הנקודה נקראת רגולרית. אם $p\left(x_{0}\right)=0$ הנקודה נקראת סינגולרית.

ראשית, נפתור על ידי טורים סביב נקודה רגולרית.

רעיון נחפש פתרון בצורה של טור חזקות סביב הנקודה הרגולרית x_{0}:

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n}$$

דוגמא ניקח $y''+y=0$. כאן, $p\left(x\right)=1$, ואין נקודות סינגולריות. נחפש פתרון כטור חזקות סביב $x_{0}=0$.