משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ארזים ©

11 במאי 2017

אנחנו חוקרים את משואת התנועה של מאסה שמחוברת לקפיץ עם חיכוך:

$$mu'' + cu' + ku = 0$$

אם החיכוך גדול, כלומר $c^2 > 4mk$, נקבל שני פתרונות ממשיים ושליליים של הפולינום האופייני:

$$mr^2 + cr + k = 0$$
$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

בכל מקרה, הפתרון ידעך לאפס (נקודת שוויו המשקל). הפתרון הוא

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

אך החיכוך קטן, משמע $c^2 < 4mk$ת נקבל פתרון מחזורי

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\cos(\mu t) + B(\sin \mu t)\right)$$

כאשר $\mu = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$. אלה תנודות מחזוריות, חיוביות ושליליות, שדועכות לאפס. נוסיף כעת לבעיה כוח אילוץ חיצוני שפועל על המסה:

$$mu'' = -ku - cu' + F_{ext}$$

נניח כי $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$, ונקבל

$$mu'' + cu' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

מקרה ראשון - אין חיכוך:

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

נמצא קודם פתרון פרטי. נצטרך לבדוק האם ω שורש של הפולינום האופייני mr^2+k. השורשים הם

$$r=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

אם $\omega\neq\omega_0$ נפעיל שיטת מקדמים לא ידועים. נקבל

$$y_p=a\cos\left(\omega t\right)+b\sin\left(\omega t\right)$$

החלק של $\sin$ יתבטל כי באגף ימין לא כתוב $\sin$. נציב:

$$\begin{aligned}-ma\omega^2+ka=F_0\\ a=\frac{F_0}{k-m\omega^2}=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$u\left(t\right)=c_1\sin\left(\omega_0 t\right)+c_2\sin\left(\omega_0 t\right)+\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\left(\omega t\right)$$

הפתרון הזה מכיל שתי תדירויות - ω_0, התדר הפנימי של המערכת, וגם ω, התדר של האילוץ.

מקרה מעניין ראשון - $\omega\neq\omega_0$ אבל $\omega\approx\omega_0$. נניח שהמסה במנוחה, כלומר $u\left(0\right)=0$, $u'\left(0\right)=0$. ולכן נקבל

$$\begin{aligned}c_1&=-\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\\ c_2&=0\end{aligned}$$

לכן

$$u\left(t\right)=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\left(\omega t\right)-\cos\left(\omega_0 t\right)\right)=\frac{2F_0\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

אם $\omega\approx\omega_0$, אז $\omega-\omega_0\ll\omega+\omega_0$. אזי הסינוס השמאלי משתנה הרבה יותר מהר מאשר הימני.

מקרה מעניין שני - $\omega=\omega_0$.

$$y_p\left(t\right)=t\left(A\cos\left(\omega_0 t\right)+B\sin\left(\omega_0 t\right)\right)$$

$\omega = \omega_0$ שורש של המשוואה האופיינית מריבוי 1. נציב

$$y_p'' + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

נקבל

$$-2A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

מתקבל $A = 0$, $B = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. כלומר

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

נקבל

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

החלק הימני הוא התגובה לאילוץ, בעוד החלק השמאלי נקבע לפני תנאי ההתחלה. נשים לב שקיבלנו u שאינו חסום כאשר $t \to \infty$.
מה קורה אם נוסיף כעת חיתוך? f, $\omega_0 = \omega + f$ החיכוך. בודקים (תרגיל בית) ומקבלים

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2\omega^2}}$$

נקבל שאחרי מספיק זמן, השפעת תנאי ההתחלה נעלמת, כי $\mathrm{Re}(r_1), \mathrm{Re}(r_2) < 0$. כעת, אפילו אם $\omega = \omega_0$, הפתרון נשאר חסום.